

Рена Дж. КАСУМОВА

**ЗАДАЧИ ПО
НЕЛИНЕЙНОЙ
ОПТИКЕ**

Рена Дж. КАСУМОВА

**ЗАДАЧИ ПО
НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИКЕ**

*Bakı Dövlət Universitetinin Elmi Şurasının
14 noyabr 2024-cü il tarixli iclasının
qərarı ilə (pr. № 07) təsdiq edilmişdir.*

БАКУ – 2025

Научный редактор:

- **З.А. Тагиев**, доктор физико-математических наук, профессор.

Рецензенты:

- **М.А. Джафаров**, доктор физико-математических наук, профессор,
- **Р.М. Сардарлы**, доктор физико-математических наук, профессор.

Касумова Р.Дж. Задачи по нелинейной оптике. Учебное пособие для высших учебных заведений. Баку, Изд. «Bakı Universiteti Nəşriyyatı», 2025, 224 с.

В книге систематизированы задачи по нелинейной оптике, начиная от моделей оптического осциллятора, перспективных кристаллов нелинейной оптики, квазисинхронных взаимодействий до нелинейных эффектов в волоконной оптике и в метаматериалах, эффектов самовоздействия и перекрестного взаимодействия при четырехволновом смешении. Также цикл задач посвящен когерентному антистоксовому рассеянию света, вынужденному рассеянию Мандельштама – Бриллюэна и вынужденному поляритонному рассеянию. Кроме того, рассмотрены ряд других прикладных задач нелинейной оптики, в частности анализируются процессы, ограничивающие эффективность частотного преобразования импульсного лазерного излучения.

Данная книга предназначена для магистров, докторантов естественных факультетов университетов, а также для научных работников, специализирующихся в области лазерной физики, волоконной оптики, фотоники. В приложении даны сведения полезные при решении представленных задач.

DOI: <https://doi.org/10.36719/0845/2025>

© Р.Дж. Касумова, 2025

ВСТУПЛЕНИЕ

Данное пособие посредством решения задач знакомит читателя с особенностями взаимодействия лазерного излучения с нелинейной средой и формирует у него представления о влиянии лазерного излучения на оптическую среду.

Существуют различные пути повышения эффективности преподавания, т. е. способности довести до аудитории информацию. Как известно, решение задач составляет важный этап в процессе обучения точным наукам и для этого требуется знание основных законов физики, понимание формул, способность выдвигать гипотезы о характерных особенностях физических явлений и областях их применений, умение использовать общие законы применительно к решению конкретных практических задач по нелинейной оптике. Умение решать задачи будет лучшим мерилем глубины восприятия материала пособия и его изучения, даст читателю базовые знания в области нелинейной оптики – важнейшем разделе современной оптики.

В данном задачнике представлены наряду со сложными задачами, требующими аналитических выкладок, и простые задачи «в одно действие», опирающиеся на элементарные познания в нелинейной оптике. Посредством решения задач формируется представление о физике нелинейно-оптических преобразований частоты в перспективных кристаллах нелинейной оптики, проанализированы методы расчета эффективности преобразования в приближении заданной интенсивности, показаны пути управления нелинейно оптическими методами выходным импульсным излучением лазера. На примере решения задач рассмотрены процессы параметрического взаимодействия волн и квазисинхронного взаимодействия оптических волн на нелинейностях оптических материалов, а

также в материалах с отрицательным показателем преломления. Проанализированы параметры вынужденного рассеяния: при когерентном антистоксовом рассеянии света, рассеянии Мандельштама – Бриллюэна и поляритонном рассеянии.

ПОЛЯРИЗОВАННОСТЬ И ВОСПРИИМЧИВОСТЬ

Для объяснения нелинейно оптических эффектов, наблюдаемых при прохождении интенсивного лазерного излучения через среду, существуют два подхода, описывающих нелинейный отклик среды. В первом подходе нелинейность среды объясняется появлением значительной нелинейной составляющей поляризованности среды, которой нельзя пренебречь по сравнению с линейной компонентой поляризованности. Во втором подходе происхождение нелинейно оптических эффектов объясняется существованием нелинейной составляющей показателя преломления среды, зависящей от интенсивности проходящего через среду мощного излучения. Ранее используемый термин “поляризация” среды теперь, согласно принятому в русскоязычной научной литературе ГОСТУ, заменен на термин “поляризованность” среды. Термин “поляризация” теперь относят только к векторному свойству света. Здесь и далее будем придерживаться этого правила.

В нелинейной оптике не выполняется принцип суперпозиции световых волн, что сопровождается генерацией новых спектральных компонент поля. В результате взаимодействия волн происходит перекачка энергии из одной волны в другую.

Все электромагнитные явления, включая оптические процессы, анализируются с использованием уравнений Максвелла согласно классической теории взаимодействия электромагнитных волн и зарядов, из которых состоят молекулы. Весь анализ в первом приближении проводится в дипольном приближении. Более сложная и точная картина взаимодействия наблюдается в следующем квадрупольном и более высоких мультипольных приближениях. При рассмотрении нелинейно оптических взаимодействий на основе уравнений Максвелла нелинейный отклик среды и распространение волны в нелинейной среде описываются нелинейными поляризованностями

и экспериментально измеренными восприимчивостями $\chi^{(n)}$ среды. Здесь используется феноменологическое описание восприимчивости, что предполагает рассмотрение свойств восприимчивости, не вдаваясь в его внутренние механизмы. Хотя оптические восприимчивости являются оптическими характеристиками среды и определяются электронным и молекулярным строением среды. При квантомеханическом анализе выражений нелинейных восприимчивостей применяют формализм матрицы плотности.

Физическими причинами, определяющими появление нелинейных восприимчивостей $\chi^{(n)}$ могут быть: нелинейный отклик свободного или связанного электрона, нелинейные колебания многоатомных молекул и кристаллической решетки, возбуждение светом дрейфа и диффузии зарядов в кристаллах, индуцированная светом ориентация анизотропных молекул, электрострикция, тепловые эффекты и т.п. Все они обладают существенно различным временем установления нелинейного отклика.

Нелинейная поляризованность является источником оптического излучения на новых частотах

$$P(E) = \chi^{(1)}E + \chi^{(2)}E^2 + \chi^{(3)}E^3 + \dots,$$

где первый член отвечает за линейные процессы отражения и преломления, второй член – за ГВГ, ГСЧ и ГРГ, третий член – за ГТГ и т.д. Здесь $E(r, t) = \vec{e}A \exp[-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})]$ – плоская монохроматическая электромагнитная волна, где \vec{e} – единичный вектор, определяющий направление электрического вектора, A – амплитуда волны, ω – частота в герцах, \vec{k} – волновой вектор, r – расстояние вдоль направления распространения волны. Разложение можно продолжить с включением квадрупольных и магнитодипольных членов. Так в линейной поляризованности $P^{(1)} = \chi^{(1)}E$ кроме члена с обычной линейной

(дипольной) восприимчивостью $\chi^{(1)}$ появится еще одно слабое с линейной квадрупольной восприимчивостью $\chi^{(1)Q}$, а для квадратичной поляризованности $P^{(2)} = \chi^{(2)}E^2$ кроме члена с $\chi^{(2)}$ появится еще один член с квадратичной квадрупольной восприимчивостью $\chi^{(2)Q}$ и т.д.

1. Диэлектрик во внешнем электрическом поле поляризуется. Различают 3 вида поляризованности среды.

- Перечислите виды поляризованности,
- приведите характерные времена поляризованности диэлектриков,
- почему времена установления поляризованности отличаются
- какой из перечисленных видов поляризованности важен в оптическом диапазоне

2. При распространении в среде плоской монохроматической электромагнитной волны $E(r, t) = \vec{e}_1 A_1 \exp[-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})]$ в разложении поляризованности P среды (т.е. дипольного момента единицы объема) в ряд по степеням напряженности внешнего электромагнитного поля $E(r, t)$ присутствуют квадратичные, кубические, ..., m -го порядка нелинейные члены по внешнему полю, содержащие спектральные компоненты на комбинационных частотах. Наличие нелинейной части поляризованности связано с зависимостью тензора восприимчивости среды от напряженности поля, что проявляется в интенсивных лазерных полях. Рассмотреть границы применимости этого разложения. Насколько важно учитывать нелинейные члены разложения? Что можно сказать о сходимости этого ряда?

3. Оценить отношение последующего члена разложения поляризованности в ряд по степеням внешнего поля лазерного излучения E к предыдущему члену на примере кварцевого кристалла или KDP. Принять напряженность лазерного

поля $E = 10^4 \text{ В/см} \div 10^5 \text{ В/см}$.

4. При вырожденном трехчастотном взаимодействии в случае генерации суммарной частоты, когда $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, а $\omega_3 = 2\omega$, получаем генерацию второй гармоники. Почему поляризованность на суммарной частоте отличается от поляризованности в невырожденном случае?

5. Динамика поведения оптического электрона в атоме зависит от двух полей, действующих на электрон: внутриатомного поля E_a и внешнего светового поля E_{light} . Найти отношение этих полей E_{light}/E_a . Считать, что плотность потока энергии лазерного поля $|S| = 10^{12} \text{ Вт/см}^2$.

6. При распространении в квадратично нелинейной среде двух волн на частотах ω_1 и ω_2 какие нелинейно оптические процессы возможны в такой среде? Как их интерпретировать с квантовой точки зрения?

7. На основании выражения для поляризованности третьего порядка $P^{(3)} = \chi^{(3)} E^3$ провести анализ процессов, возможных в среде с кубичной нелинейностью. Считать, что на среду с кубичной нелинейностью падает волна вида $E = A \cos \omega t$. Дать их интерпретацию с квантовой точки зрения.

8. Оценить поляризуемость α свободного электрона при $\omega \gg \delta$, где δ – затухание осциллирующего движения электрона, для длины волны излучения, соответствующей потенциалу ионизации атома водорода $U_i = 13.6 \text{ эВ}$.

9. Оценить в кристалле кварца отношение квадратичной восприимчивости к кубичной восприимчивости.

10. На рис. 1 дана экспериментальная зависимость интенсивности второй гармоники излучения рубинового лазера от угла поворота кристалла по отношению к падающему лазерному лучу. Какие параметры среды можно определить из данной зависимости?

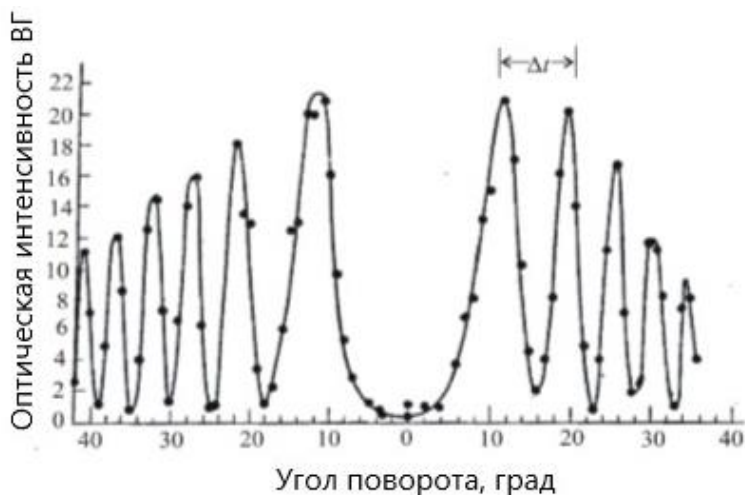


Рис. 1. Экспериментальная зависимость интенсивности ВГ от длины кристалла.

Модуляция показателя преломления среды

Как было отмечено выше, взаимодействие световых волн в нелинейной среде помимо появления нелинейных компонент поляризуемости среды можно также объяснить модуляцией показателя преломления среды. Действительно,

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = (1 + 4\pi\chi^{(1)} + 3\pi\chi^{(3)}A^2)\vec{E} = n^2\vec{E} = (\varepsilon_0 + \varepsilon_2A^2)\vec{E},$$

где $\varepsilon_0 = 1 + 4\pi\chi^{(1)}$, а $\varepsilon_2 = 3\pi\chi^{(3)}$. Под действием падающей волны происходит переизлучение в среде на частоте падающей

волны, но с амплитудой пропорциональной кубу амплитуды лазерной волны. Этот член приводит к появлению нелинейной добавки к показателю преломления. Так как $\varepsilon_2 A^2 \ll \varepsilon_0$, то

$$\begin{aligned} n &= \sqrt{\varepsilon_0 + \varepsilon_2 A^2} = \sqrt{\varepsilon_0 \left(1 + \frac{\varepsilon_2 A^2}{\varepsilon_0} \right)} = \\ &= n_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_2 A^2}{\varepsilon_0} \right) = n_0 + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_2 A^2}{\sqrt{\varepsilon_0}} = n_0 + n_2 I, \end{aligned}$$

где

$$n_0 = \sqrt{\varepsilon_0}, \quad n_2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{\varepsilon_0}} = \frac{3\pi\chi^{(3)}}{2n_0}, \quad I = \frac{nc}{8\pi} A^2$$

Следовательно, сильная световая волна амплитуды A изменяет показатель преломления среды $\sim A^2$. Происходит воздействие проходящей световой волны на себя через изменение показателя преломления (или проницаемости) среды, т.е. эффект самовоздействия. Изменение n приводит к изменению фазовой скорости лазерной волны пропорционально A^2 .

В случае распространения лазерного импульса в среде разные участки импульса находятся под разными значениями интенсивности излучения, что приводит к различным нелинейным фазовым сдвигам. Это ведет к уширению спектра импульса. Наблюдается фазовая самомодуляция лазерного импульса.

11. Рассчитать оптическую длину пути интенсивной плоской световой волны в слабонелинейном оптоволокне длиной L и коэффициентом поглощения δ при следующем разложении в ряд показателя преломления по степеням интенсивности излучения $n(I) = n_0 + n_2 I + n_4 I^2$.

12. Как связаны эффекты насыщения и просветления среды?

МОДЕЛИ ОПТИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Согласно классической лоренцевой модели гармонического осциллятора – одного (водородоподобного) атома, содержащего ядро и один электрон, под действием внешнего поля электрон колеблется около положения равновесия, образуя колеблющийся диполь. Этот диполь излучает волну, частота которой равна частоте колебаний диполя, т.е. частоте внешнего приложенного поля. Однако не вся энергия внешнего поля переизлучается в виде электромагнитной волны. На самом деле приложенное поле действует не на один атом, а на систему, состоящую из большого числа атомов, взаимодействующих друг с другом. Поэтому колебания совершает не один электрон, а ансамбль частиц. Часть энергии внешнего поля расходуется на колебания атомов, а это способствует нагреванию вещества, т.е. поглощению энергии.

13. Рассмотрим линейный осциллятор (электрон массы m_e в атоме) с затуханием, который находится под воздействием плоской монохроматической световой волны с частотой ω . Среда состоит из N одинаковых осцилляторов, имеющих собственную частоту колебаний ω_0 . Смещения электрона r по порядку величины, равные размерам атома или молекулы ($\sim 10^{-10}$ м), много меньше длины волны излучения ($\sim 10^{-7}$ м), $r \ll \lambda$. Поэтому напряженность электрического поля можно считать не зависящей от координаты. Бегущая волна, распространяясь в линейной среде, возбуждает бегущую волну поляризованности среды, которая приводит к генерации вторичных бегущих волн. Найти выражение для комплексной диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega)$ среды в линейном приближении.

14. Рассмотреть модель линейного осциллятора с затуханием δ колебаний оптического электрона, находящегося под действием плоской монохроматической световой волны (см. условия предыдущей задачи). Определить восприимчивость среды.

15. Определить нелинейную восприимчивость среды χ , если внешнее электромагнитное поле $E = A \cos \omega t$, а концентрация осцилляторов равна N . Рассмотреть нелинейность среды, обусловленную только квадратичным членом, более высокие порядки нелинейности не учитывать. Отклик нелинейной среды на распространение в ней световой волны можно анализировать, используя модель ангармонического осциллятора. Нелинейная поляризованность для генерации второй гармоники имеет вид $P^{(2)}(2\omega_j) = \frac{1}{2}\chi^{(2)}(2\omega_j)E^2(\omega_j)$. Затуханием пренебречь. Считать, что слабая ангармоничность $\beta x \ll \omega_0^2$ связана только с квадратичным членом в выражении для возвращающей силы $F(x) = m_e(-\omega_0^2 x + \beta x^2)$.

16. Электрон колеблется около своего положения равновесия с частотой ω_0 , как гармонический осциллятор. Вывести соотношение между показателем преломления среды n и частотой ω внешнего поля, $E = A \cos \omega t$, вблизи частоты собственных колебаний электрона ω_0 .

17. Направление излучения поля колеблющегося диполя в вакууме пропорционально $\sin \theta$, где θ – угол между осью диполя (вертикальное направление по чертежу) и направлением наблюдения (рис. 2). Почему не возникает излучение назад?

18. Получить выражения для действительной и мнимой частей линейной восприимчивости среды, которые описывают приведенные зависимости (рис. 3).

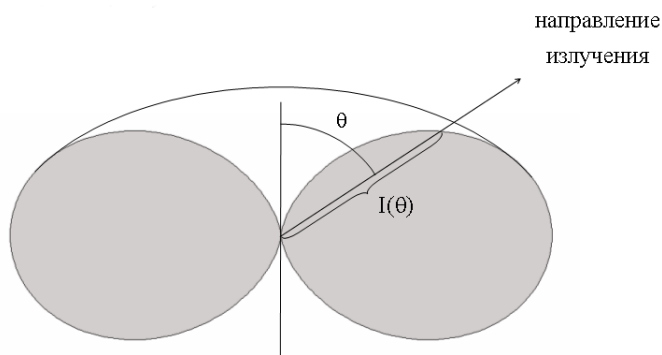


Рис. 2. Диаграмма направленности диполя.

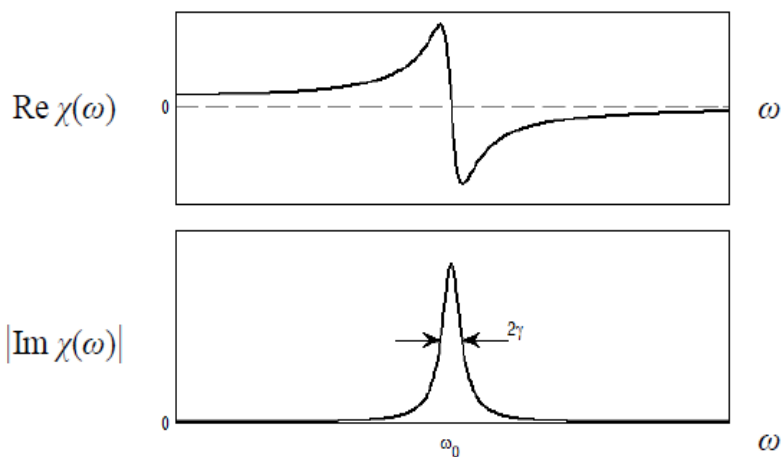


Рис. 3. Зависимость линейной восприимчивости от частоты.

19. Написать уравнение гармонического осциллятора в изотропной среде (где направление поля совпадает с направлением смещения электрона), находящейся под действием внешнего монохроматического поля $E = A \cos \omega t$. Рассмотреть одномерный случай колебаний электрона. Найти в первом приближении уравнение установившихся колебаний.

20. Рассмотрим модель ангармонического осциллятора. В отличие от гармонического осциллятора в случае нелинейного осциллятора в выражении для возвращающей силы появляются члены нелинейные по смещению, $F(x) = -m_e\omega_0^2x - m_e\gamma x^2 - m_e\beta x^3 - \dots$, нарушающие симметрию потенциальной ямы, в которой движется оптический электрон. Полагаем, что ангармонизм обусловлен присутствием только квадратичного члена в выражении для возвращающей силы, т.е. $F(x) = -m_e\omega_0^2x - m_e\gamma x^2$, где γ – коэффициент ангармонизма. Оценить величину ангармонизма для связанного электрона.

21. В нелинейной среде под действием внешнего электромагнитного поля излучения $E = A \cos \omega t$ оптический электрон колеблется около положения равновесия. Отклик нелинейной среды на распространение в ней световой волны можно анализировать, используя модель ангармонического осциллятора $P^{(1)}(\omega_j) = \chi^{(1)}(\omega_j)E(\omega_j)$. Нелинейная поляризованность для генерации второй гармоники равна $P^{(2)}(2\omega_j) = (1/2)\chi^{(2)}(2\omega_j)E^2(\omega_j)$. Определить линейную восприимчивость нелинейной среды χ , если число осцилляторов равно N . Затуханием колебаний пренебречь.

22. При взаимодействии излучения с веществом для описания электромагнитного поля излучения можно использовать классический волновой подход, представляя поле как электромагнитную волну (волновой пакет). Есть и второй квантовый подход, когда поле излучения представляем в виде фотонов. Какой из подходов применим и правильно описывает поле электромагнитного излучения?

23. Получить соотношение неопределенностей между флуктуациями фазы электромагнитной волны $\Delta\varphi$ и числом фотонов Δn_{ph} . Показать из полученного соотношения неопре-

деленностей для числа фотонов и флуктуаций фазы волнового пакета, что классическое волновое представление электромагнитного излучения правильно описывает нелинейные процессы и способствует получению важных результатов по анализу взаимодействия излучения с веществом.

24. В анизотропной среде направление волнового вектора \vec{k} , т.е. направление нормали к волновому или фазовому фронту, не совпадает направлением вектора плотности мощности излучения, т.е. вектором Пойнтинга \vec{S} . Эти два вектора образуют так называемый угол анизотропии, равный β (рис. 6). Такой же угол образуется между векторами напряженности электрического поля \vec{E} и электрической индукции \vec{D} .

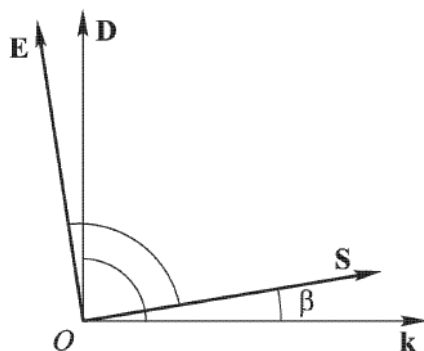


Рис. 4. Угол анизотропии β между векторами напряженности электрического поля \vec{E} и электрической индукции \vec{D} или \vec{k} и \vec{S} .

Доказать, что вектор электрической индукции \vec{D} перпендикулярен волновому вектору \vec{k} .

25. В общем случае анизотропной среды направление вектора Пойнтинга \vec{S} (вектора плотности потока излучения) со-

ставляет угол β с направлением волнового вектора \vec{k} , который называют углом анизотропии. Направление волнового вектора необыкновенной волны составляет угол θ с оптической осью кристалла.

- Определить этот угол анизотропии.
- Показать, в каких двух случаях $\beta = 0$.

26. Получить выражение, связывающее плотность потока излучения I в единицах Вт/см² и амплитуду волны лазерного излучения a в единицах В/м. Принимаем, что комплексная амплитуда поля волны $A = a \cdot e^{i\varphi}$, где a – вещественная амплитуда волны, φ – фаза волны.

27. Оценить амплитуду волны на $\lambda = 1.064$ мкм, распространяющейся в KDP кристалле, при плотности мощности излучения 10^{11} Вт/см².

28. Оценить амплитуду волны на $\lambda = 1.064$ мкм, распространяющейся в LiNbO₃ кристалле, при плотности мощности излучения $1.2 \cdot 10^9$ Вт/см².

29. При скалярном ое-е синхронизме в процессе ГВГ происходит снос энергии (walk-off-effect – диафрагменный апертурный эффект) для необыкновенных волн основного излучения и волны гармоника (рис. 5). Здесь z – ось синхронизма. Волновые векторы направлены вдоль оси z . В этом случае существуют две апертурные длины.

Почему снос энергии происходит только для двух потоков из трех рассматриваемых?

Укажите на рис. 5 на какой длине нелинейной среды происходит ГВГ?

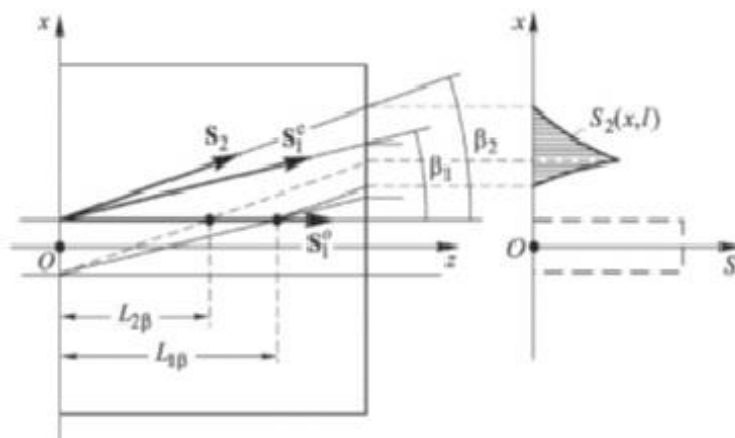


Рис. 5. Диафрагменный апертурный эффект.

ФАЗОВАЯ И ГРУППОВАЯ СКОРОСТИ

В настоящее время рекордная интенсивность лазерного луча достигает $\sim 10^{21} \div 10^{22}$ Вт/см². В таких полях проявляются эффекты, которые не обнаруживаются при слабых полях. Как известно, при нестационарном режиме эффективность процесса генерации гармоники зависит помимо фазовой расстройки взаимодействующих волн также от эффектов групповой расстройки и дисперсионного расплывания. По мере распространения волн разной поляризации в среде из-за разных групповых скоростей происходит смещение этих волн друг относительно друга, что приводит к уменьшению перекрытия волновых пакетов, а то и к разнесению их в пространстве, что ведет к возможности полного отсутствия взаимодействия между волнами (см. рис. 8). Разброс групповых скоростей ведет к групповому запаздыванию. Таким образом, по мере распространения в среде обыкновенных и необыкновенных волн различие групповых скоростей ведет к пространственному смещению волн друг относительно друга.

30. Фазовая скорость световой волны на частоте ω определяется, как $v(\omega) = c/n(\omega)$. Зная дисперсию среды, т.е. закон изменения $n(\lambda)$, вывести формулу для групповой скорости световой волны в данной среде в зависимости от длины волны излучения.

31. Получить формулу Рэлея, связывающую групповую и фазовую скорости волны, $u = v - \lambda (dv/d\lambda)$, где u – групповая скорость волны, а v – фазовая скорость волны.

32. На рис. 7 дана зависимость фазовой скорости волны v от длины волны излучения λ . Фазовая скорость волны $v(\omega) = c/n(\lambda)$. Прямая – касательная к зависимости $v(\lambda)$ при $\lambda = \lambda_0$. Доказать, что отрезок u на ординате зависимости $v(\lambda)$ равен значению групповой скорости волны при $\lambda = \lambda_0$.

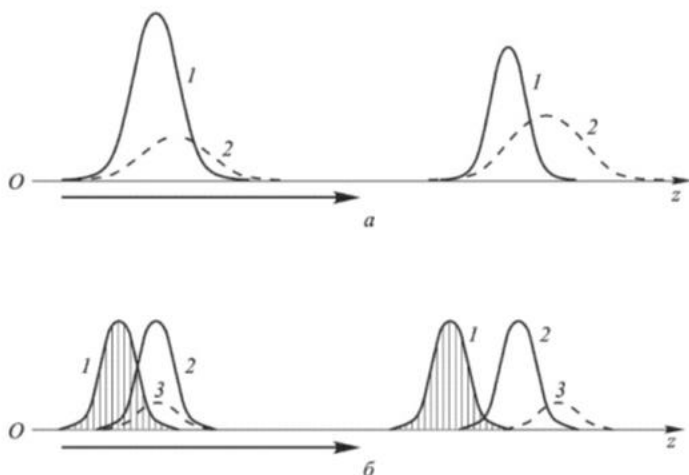


Рис. 6. Групповое запаздывание импульсов.

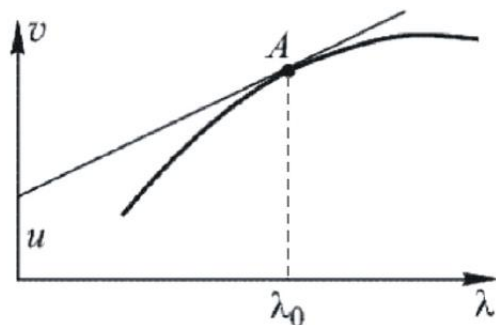


Рис. 7. Зависимость фазовой скорости волны v от длины волны излучения.

33. При распространении лазерного импульса в диспергирующей среде, где фазовая и групповая скорости зависят от частоты, форма импульса меняется. Происходит уширение импульса из-за разных групповых скоростей для каждой частотной составляющей лазерного импульса, т.е. из-за дисперсии групповых скоростей. Дисперсионная деформация (расплывание) импульсов наблюдается из-за дисперсии фазовых скоростей. Лазерный импульс имеет центральную частоту ω_0 (соответствующее волновое число k_0) с шириной полосы частот $\Delta\omega$. Рассмотрим дисперсионные свойства среды. Связь между ω и волновым числом k выражается следующим образом: $k = n(\omega)\omega/c$.

Разложим $\omega(k)$ в ряд Тейлора в окрестности k_0 :

$$\omega(k) = \omega_0 + \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k=k_0} (k - k_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\omega}{dk^2}\right)_{k=k_0} (k - k_0)^2 + \dots$$

Показать, что

$-(d^2\omega/dk^2)_{k=k_0}$ пропорционален разбросу в групповых скоростях u и

$$-\frac{du}{d\lambda} = u^2 \frac{\lambda}{c} \frac{d^2 n}{d\lambda^2}.$$

34. Выберите какая формула соответствует многофотонному внешнему фотоэффекту?

$$\begin{aligned} \hbar\omega &= A + W_{max}; k \cdot \hbar\omega = A + W_{max}; \\ \hbar\omega &= k \cdot A + W_{max}; k \cdot \hbar\omega = A; k \cdot \hbar\omega = W_{max}, \end{aligned}$$

где параметр k – число фотонов, A – работа выхода, W_{max} максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов.

35. Какой физический смысл частоты Раби в квантовой модели взаимодействия интенсивного излучения с веществом?

36. Рассчитать в KDP кристалле групповые скорости для обыкновенной u_1^0 и необыкновенной u_1^e волн основного излучения неодимового лазера ($\lambda=1.064$ мкм) и второй гармоники u_2^0 и u_2^e , соответственно.

37. Рассчитать в LiNbO₃ кристалле групповые скорости для обыкновенной u_1^0 и необыкновенной u_1^e волн основного излучения неодимового лазера ($\lambda=1.064$ мкм) и второй гармоники u_2^0 и u_2^e , соответственно.

38. Оценить эффект группового запаздывания взаимодействующих импульсов основного излучения на длине волны 1.06 мкм и волны второй гармоники в случае оо-е взаимодействия при двух значениях длительности импульсов 1 пс и 2 пс, распространяющихся в KDP кристалле, рассчитав значения квазистатических длин взаимодействия l_V .

39. Оценить эффект группового запаздывания взаимодействующих импульсов длительностью 1 пс и 2 пс на длине

волны 1.06 мкм, распространяющихся в LiNbO_3 кристалле, в случае оое взаимодействия, рассчитав значения квазистатических длин взаимодействия l_v .

40. Оценить эффект группового запаздывания взаимодействующих импульсов длительностью 1 пс и 2 пс на длине волны 1.06 мкм, распространяющихся в KDP кристалле, в случае оое взаимодействия, рассчитав значения квазистатических длин взаимодействия l_v .

41. Оценить эффект группового запаздывания взаимодействующих импульсов длительностью 1 пс и 2 пс на длине волны 1.06 мкм, распространяющихся в LiNbO_3 кристалле, в случае оое взаимодействия, рассчитав значения квазистатических длин взаимодействия l_v (см. рис. 7).

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИКЕ

Для теоретического анализа нелинейно оптических эффектов при классическом описании электромагнитного излучения, как электромагнитной волны, используются уравнения Максвелла. Так при аналитическом рассмотрении нелинейного взаимодействия лазерного излучения с веществом из общих уравнений электродинамики получается волновое уравнение, содержащее член с нелинейной поляризацией. У разных нелинейных эффектов выражение нелинейной поляризации отличается. Для каждого конкретного нелинейного процесса получается своя система укороченных уравнений, которая проще исходных, но и их решение за исключением отдельных частных случаев практически невыполнимо. Для рассмотрения большого круга задач в теории нелинейных волн необходимо решить систему связанных нелинейных дифференциальных уравнений. В большинстве случаев в общем виде решение данной

системы связанных нелинейных дифференциальных уравнений не представляется возможным. Поэтому для аналитического исследования укороченных уравнений – используют разные приближённые методы. В первую очередь надо отметить приближение заданного поля и заданной интенсивности и приближение сильного взаимодействия¹.

В первом методе комплексная амплитуда сильной волны накачки полагается постоянной, т.е. заданной – это широко распространённое приближение заданного поля (ПЗП). Это приводит к значительному упрощению задачи. Из неизменности комплексной амплитуды основной волны следует постоянство интенсивности и фазы возбуждаемой волны на всём пути следования нелинейно взаимодействующих волн в среде. Однако в реальных средах пренебрежение изменением фаз взаимодействующих волн приводит к утере информации о специфических свойствах нелинейного взаимодействия.

Таким образом, ПЗП может описать нелинейное взаимодействие волн в первый момент, когда пока ещё правомерно не учитывать обратное влияние возбуждаемых волн на волну накачки и, как следствие, изменение фазовых соотношений взаимодействующих волн.

Это приводит к ограниченному рассмотрению взаимодействия волн в реальных средах, к потере информации об особенностях нелинейного процесса. Строго говоря, в ПЗП закон сохранения энергии не выполняется.

Во втором методе интенсивность сильной волны накачки полагается постоянной, т.е. заданной, а на фазу волны

¹Тагиев З.А., Чиркин А.С. Приближение заданной интенсивности в теории нелинейных волн. ЖЭТФ, 1977, т.73, вып.4, с.1271-1282;

Ибрагимов Э.А., Усманов Т. Приближение сильного взаимодействия в теории нелинейных волн. ЖЭТФ, 1984, т.86, №5, с.1618-1631;

Z.H.Tagiev, R.J. Kasumova, R.A.Salmanova, N.V.Kerimova. Constant-intensity approximation in a nonlinear wave theory. J. Opt. B: Quantum Semiclas. Opt. 2001, 3, 84-87.

накачки никаких ограничений не накладывается – это развиваемое в последние годы приближение заданной интенсивности (ПЗИ). Физическую суть приближения заданной интенсивности составляет разные темпы изменения амплитуд и фаз взаимодействующих волн, из чего следует, что данное приближение хорошо работает при рассогласовании фаз взаимодействующих волн. Но и в случае фазового синхронизма, как показывают исследования, результаты приближения заданной интенсивности лучше согласуются с численным счётом, чем результаты приближения заданного поля. При параметрическом взаимодействии необходимо учитывать пороговый характер параметрической генерации, в который существенный вклад вносят потери и фазовая расстройка (волновая расстройка) взаимодействующих волн. Одновременный учет изменения фаз и потерь взаимодействующих волн удастся осуществить в приближении заданной интенсивности.

Кроме того, для анализа нелинейного процесса возможно использовать прямой численный счет связанных уравнений. Однако для большей физической наглядности оправдано использование аналитических методов исследования, что позволит получить конкретные аналитические выражения и определить оптимальные параметры задачи с целью получения максимальной эффективности преобразования. Среди аналитических методов, кроме перечисленных выше, можно отметить приближение сильного взаимодействия, которое работает при больших эффективностях преобразования, т.е. при слабых отстройках фаз взаимодействующих волн.

В ПЗП выражение для комплексной амплитуды второй гармоники имеет вид

$$A_2(z) = -i\gamma_2 A_{10}^2 \cdot z \cdot \text{sinc}(\Delta z) \cdot \exp(i\Delta z/2),$$

где $\gamma_2 = 8\pi\chi_{eff}^{(2)}\omega_2^2\varepsilon_2/k_2c^2$ – коэффициент нелинейной связи

на частоте второй гармоники, связанный с квадратичной восприимчивостью среды, A_{10} – начальное значение комплексной амплитуды волны накачки, $\Delta = k_2 - 2k_1$ – фазовая расстройка между волнами накачки и второй гармоники, z – координата вдоль направления распространения волн.

В ПЗИ для комплексной амплитуды второй гармоники в нелинейной среде получаем

$$A_2(z) = -i\gamma_2 A_{10}^2 \cdot z \cdot \text{sinc}(\lambda z) \cdot \exp\left(-\frac{2\delta_2 - i\Delta}{2}z\right),$$

где $\lambda = \sqrt{2\gamma_1\gamma_2 I_{10} - (\delta_2 - 2\delta_1 + i\Delta)^2/4}$, $\delta_{1,2}$ – линейное поглощение в среде. Отметим, что из сравнения двух выражений для комплексной амплитуды второй гармоники A_2 , полученных в обоих приближениях, видно, что их отличие заключается в фазовой части, т.е. в аргументе синуса и в показателе степени экспоненты.

Смысл развития ПЗИ заключается в нахождении уравнения следующего более точного приближения (подобно методу последовательных приближений или итерации), чем в ПЗИ. При этом учитывается не только изменение фаз взаимодействующих волн, но и частичное изменение интенсивности возбуждающих волн за счёт перекачки энергии возбуждаемой волны в энергию возбуждающей волны. В результате полученное решение сравнивается с решением, полученным в приближении заданной интенсивности, и отсюда находятся условия справедливости приближённых решений. Получено, что результаты во втором приближении лучше согласуются с точным расчётом, чем результаты в ПЗИ, а тем более ПЗП. Это связано с тем, что во втором развитом приближении, помимо изменения фаз взаимодействующих волн, учитывается ещё частичное изменение интенсивности возбуждающих волн. Аналитически определены границы применимости ПЗИ для генерации суммарной и

разностной частот и для генерации второй гармоники.

Рассмотрим развитие приближения на примере генерации суммарной частоты. Для этого интенсивности входных волн $I_{1,2}(z)$ на частотах ω_1 и ω_2 разлагаем в ряд Тейлора в окрестности точки $z=0$

$$I_{1,2}(z) = I_{1,2}(z=0) + \left. \frac{dI_{1,2}}{dz} \right|_{z=0} z + \left. \frac{d^2 I_{1,2}}{dz^2} \right|_{z=0} \frac{z^2}{2!} + \dots,$$

где первый член разложения соответствует ПЗИ (первому приближению). Решая соответствующее уравнение с учетом последующего члена в разложении, можно найти решение для амплитуды, соответствующее следующему второму приближению. Из сопоставления обоих решений определяются условия применимости ПЗИ.

42. Найти условия применимости ПЗИ для случая генерации суммарной частоты, когда основная волна с частотой ω_1 и волна на частоте ω_2 падают на вход нелинейного кристалла.²

43. Найти условия применимости ПЗИ для случая генерации второй гармоники, когда основная волна на частоте ω_1 падает на вход нелинейного кристалла.³

44. Найти условия применимости ПЗИ для случая генерации разностной частоты $\omega_1 = \omega_3 - \omega_2$, когда основная волна

²З.А.Тагиев, Р.Дж. Касумова, Р.А.Салманова, Н.В.Керимова. Применимость приближения заданной интенсивности при генерации суммарной и разностной частот. *Bakı Universitetinin Xəbərləri*, 2000, №3, 21-28.

³Z.H.Tagiev, R.J. Kasumova, R.A.Salmanova, N.V.Kerimova. Constant-intensity approximation in a nonlinear wave theory. *J. Opt. B: Quantum Semiclas. Opt.* 2001, **3**, 84-87.

с частотой ω_2 и волна на частоте ω_3 падают на вход нелинейного кристалла.⁴

45. Оценить эффективность преобразования во вторую гармонику в KDP кристалле, где квадратичная восприимчивость $\chi^{(2)} = 3 \cdot 10^{-9}$ СГСЭ. Мощность основного излучения принять равной 100 МВт/см².

46. Оценить мощность излучения второй гармоники при возрастании когерентной длины от 100 мкм до 2 см.

47. Наиболее распространенный метод решения укороченных уравнений – ПЗП, где комплексная амплитуда сильной волны накачки берется постоянной. Используя данное приближение при ГВГ, вывести аналитическое выражение для комплексной амплитуды второй гармоники в ПЗП.

48. Определить длину когерентности l_{coh} в ПЗП при генерации второй гармоники основного излучения на длине волны $\lambda = 1$ мкм и $n_{2\omega} - n_{\omega} = 10^{-2}$. Оценить, как изменяется мощность второй гармоники при возрастании l_{coh} в 10^3 раз.

49. Из поведения зависимости интенсивности второй гармоники от длины нелинейной среды в обоих приближениях следует, что в отличие от ПЗП в ПЗИ период пространственных биений зависит от интенсивности I_{10} и параметра нелинейной среды. Определяя экстремумы функции $I_2^{output}(z)$, можно определить параметр нелинейной среды. Какой параметр нелинейной среды можно определить предлагаемым методом?⁵

⁵Z.H.Tağıyev, R.J. Kasumova. Maddənin qeyri-xətti optik qavrayıcılığının təyini üsulu. Patent I 2000 0162, Azər. Respub. Dövlət Elm və Tex..Kom., 2000;

З.А.Тагиев, Р.Дж. Касумова. Определение нелинейных восприимчивостей высших

50. Исторически соотношения Мэнли – Роу были выведены для радиочастотного диапазона в 1950-х г. Вывести соотношения Мэнли – Роу при трехчастотном взаимодействии оптических волн.

51. Получить соотношение Мэнли – Роу при ГСЧ на частоте ω_3 ($\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$), когда на входе в среду имеются две волны на частотах ω_1 и ω_2 .

52. Сравнить соотношение Мэнли – Роу для генерации суммарной ($\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$) и разностной частот ($\omega_3 - \omega_2 = \omega_1$). При сложении частот излучения лазеров мощность обеих входных волн будет уменьшаться, а волна на ω_3 будет увеличиваться. При генерации разностной частоты волны на каких из трех частот усиливаются?

53. ГВГ мощного лазерного излучения в нецентросимметричной среде происходит с участием как квадратичной, так и кубической нелинейностей среды. Взаимодействие сопровождается эффектами самовоздействия, так и перекрестного взаимодействия. В ПЗИ выражение для эффективности преобразования во вторую гармонику η_2 в случае $\delta_2 = 2\delta_1$ имеет вид:

$$\eta_2 = \frac{I_2(z)}{I_{10}} = \left\{ \frac{A_{20}^2}{I_{10}} \cos^2 \lambda' z + \left[\frac{(\Delta k_1^{NL} + \Delta k_2^{NL} - \Delta k) A_{20}}{2 \sqrt{I_{10}}} z - \gamma_2 z \frac{A_{10}^2}{\sqrt{I_{10}}} \right]^2 \sin^2 \lambda' z \right\} \exp(-\delta_2 z),$$

где $A_{1,2}$ – комплексные амплитуды волны накачки и второй гармоники на частотах $\omega_{1,2}$ ($\omega_2 = 2\omega_1$), соответственно, $\gamma_{1,2}$ – коэффициенты нелинейной связи волн, $\Delta k = k_2 - 2k_1$ – фазовая расстройка, $\delta_{1,2}$ – коэффициенты поглощения для волн на

частотах $\omega_{1,2}$, соответственно; γ_{jj}, γ_{mj} – коэффициенты, связанные с кубической нелинейностью среды. Члены γ_{11}, γ_{22} ответственны за самовоздействие волн, а с γ_{12}, γ_{21} – за перекрестное взаимодействие волн.

$$\Delta k_1^{NL} = (2\gamma_{11} - \gamma_{21})I_{10}, \quad \Delta k_2^{NL} = (2\gamma_{12} - \gamma_{22})I_{20},$$

$$\lambda'^2 = 2\Gamma^2 + (\Delta k_1^{NL} + \Delta k_2^{NL} - \Delta k)^2/4.$$

Аналитически получить выражение для оптимальной длины подобной нецентросимметричной среды в ПЗИ.⁶

54. Использовать условия предыдущей задачи, но при отсутствии на входе в нелинейную среду сигнала второй гармоники ($I_{20} = 0$). Определить оптимальные значения линейной фазовой расстройки Δk_{opt} , при которой эффективность преобразования максимальна.⁷

55. Используя условия предыдущей задачи, определить период пространственных биений амплитуды второй гармоники мощного лазерного излучения в нецентросимметричной среде.

56. Рассмотрим параметрический процесс с высокочастотной накачкой на частоте ω_3 ($\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$) в среде с квадратичной и кубической поляризацией, где $\omega_{1,2}$ – частоты сигнальной и холостой волн ($\omega_1 > \omega_2$). Считаем, что взаимодействующие волны распространяются в положительном направ-

⁶Z.H. Tagiev, Rena J. Kasumova. Phase effects at second harmonic generation of powerful laser radiation in noncentrosymmetrical media. *Optics & Communications*, 2006, **268**, 311-316.

⁷Z.H. Tagiev, Rena J. Kasumova. Phase effects at second harmonic generation of powerful laser radiation in noncentrosymmetrical media. *Optics & Communications*, 2006, **268**, 311-316.

лении оси z . в ПЗИ, $I_2(z) = I_2(z = 0) = I_{20}$, $I_3(z) = I_3(z = 0) = I_{30}$, для комплексной амплитуды сигнальной волны с учетом граничных условий (2) получаем

$$A_1(z) = A_{10} \left(\cosh q_1 z - \frac{B_1 + P_1}{q_1} \sinh q_1 z \right) \exp \left(-\frac{p}{2} z \right) \text{ at } p^2 > 4q,$$

$$A_1(z) = A_{10} \left(\cos q_2 z - \frac{B_1 + P_1}{q_2} \sin q_2 z \right) \exp \left(-\frac{p}{2} z \right) \text{ at } p^2 \leq 4q,$$

где

$$q_1^2 = \left(\frac{p^2}{4} - q \right), \quad q_2^2 = \left(q - \frac{p^2}{4} \right),$$

$$p = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + i[aI_{10} + bI_{20} + cI_{30} + \Delta],$$

$$a = \gamma_{11} + \gamma_{21} + \gamma_{31}, \quad b = \gamma_{12} + \gamma_{22} + \gamma_{32},$$

$$c = \gamma_{13} + \gamma_{23} + \gamma_{33},$$

$$q = \Gamma_2^2 - \Gamma_3^2 + (\delta_1 + id)[\delta_2 + \delta_3 + i(e + f + \Delta)],$$

$$\Gamma_2^2 = \gamma_1 \gamma_3 I_{20}, \quad \Gamma_3^2 = \gamma_1 \gamma_2 I_{30}, \quad d = \gamma_{11} I_{10} + \gamma_{12} I_{20} + \gamma_{13} I_{30},$$

$$e = \gamma_{21} I_{10} + \gamma_{22} I_{20} + \gamma_{23} I_{30}, \quad f = \gamma_{31} I_{10} + \gamma_{32} I_{20} + \gamma_{33} I_{30},$$

$$I_j = A_j A_j^*, \quad B_1 = \frac{i \gamma_1 A_{30} A_{20}^*}{A_{10}},$$

$$P_1 = [\delta_1 - \delta_2 - \delta_3 + i(d - e - f - \Delta)]/2.$$

Определить коэффициент усиления сигнальной волны

$$\eta_1 = I_1/I_{10} \text{ для случая } (\delta_1 = \delta_2 + \delta_3)^8.$$

⁸R.J. Kasumova, G.A. Safarova, L.S. Gadjieva. Phase effects at parametric interaction in intense light fields in noncentrosymmetrical media. *Bakı Universitetinin Xəbərləri*, 2011, № 1, səh. 145-156.

СОГЛАСОВАНИЕ ФАЗ. УСЛОВИЕ СИНХРОНИЗМА

Возникающий в определенной точке среды нелинейный эффект мал. Однако при выполнении условия фазового синхронизма между волнами нелинейность может накапливаться. При фазовом синхронизме происходит согласованное распространение этих волн, интерференция и их усиление по мере распространения в нелинейной среде. Выполнению условия синхронизма нарушается нормальной дисперсией кристалла, однако, в анизотропных кристаллах, например при ГВГ, существует направление, вдоль которого скорости волны накачки и гармоники одинаковы.

Условие фазового синхронизма при ГВГ выражается следующим соотношением между волновыми векторами $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{K}$, где \vec{k}_1, \vec{k}_2 – волновые векторы волны накачки на частоте ω , $k_j = (\omega/c)n(\omega)$, $j = 1, 2$ а \vec{K} – волновой вектор волны второй гармоники, $K = (2\omega/c)n(2\omega)$. При ГВГ всегда, как при фазовой расстройке, так при условии синхронизма, выполняется закон сохранения импульса, $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}$, где \vec{k} – векторная сумма волновых векторов \vec{k}_1 и \vec{k}_2 , а также волновой вектор квадратичной поляризованности среды.

Условие фазового синхронизма выполняется для единственной частоты ω в определенном направлении. Но выходная интенсивность второй гармоники I_2 является функцией расстройки (рис. 8), а не есть дельта функция расстройки Δk . Выражение для I_2 , полученное в ПЗП, имеет вид:

$$I_2(z = L) = I_{10} L^2 \operatorname{sinc}^2 \frac{\Delta k L}{2},$$

где L – длина нелинейной среды.

Другими словами, возможны небольшие отклонения от условия фазового синхронизма в интервале изменений фазовой

расстройки от $-\pi/L$ до $+\pi/L$. Максимум преобразования реализуется при волновом или фазовом синхронизме $\Delta k = 0$, когда фазовые скорости обеих волн равны.

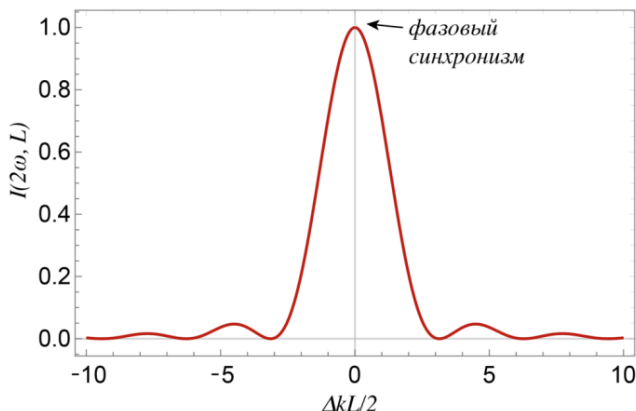


Рис. 8. Интенсивность ВГ в зависимости от фазовой расстройки при фиксированной длине среды – кривая синхронизма.

Конечная ширина кривой синхронизма приводит к возможности:

- отклонения от угла синхронизма (от направления синхронизма) в определенном интервале углов.
- малых изменений частоты основного излучения.

Рассмотрим условия синхронизма в случае генерации третьей гармоники. В органических красителях для синхронного взаимодействия при ГТГ используются красители с полосой поглощения вблизи ω_0 , расположенной между частотами основного излучения и третьей гармоники. Тогда в области поглощения, благодаря аномальной дисперсии, выполняется равенство для показателей преломления на этих частотах, т.е. $n(\omega) = n(3\omega)$ (см. рис. 9).

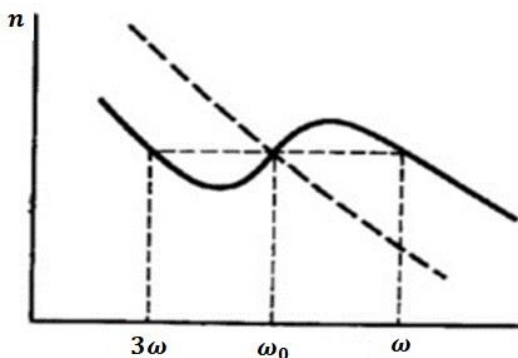


Рис. 9. Зависимость показателя преломления n среды от частоты.

Однако для синхронности взаимодействия поглощение в красителе на частотах ω и 3ω должно быть малым, чтобы можно было наблюдать синхронный процесс ГТГ.

Жидкие кристаллы обладают большим двулучепреломлением. Поэтому при ГТГ в молекулярных кристаллах возможно использование как метода компенсации двулучепреломления частотной дисперсией, так и применения аномальной дисперсии. Экспериментальная трудность наблюдения данных методов при ГТГ связана со значительным поглощением излучения третьей гармоники широко применяемых лазеров.

57. Дисперсия среды приводит к разным значениям показателя преломления на основной частоте и частоте гармоники, что необходимо учесть в выражении для расстройки волновых векторов. Кроме того, если условие синхронизма для центральной частоты ω_0 в случае, например, ГВГ записывается в виде $\Delta k(\omega_0) = k_2(2\omega_0) - 2k_1(\omega_0)$, то необходимо учесть возможность варьирования центральной частоты в малом интервале $\Delta\omega$. С этой целью можно разложить расстройку волновых векторов Δk в ряд Тейлора по степеням отклонения частоты основного излучения $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ от центральной частоты ω_0 :

$$\Delta k(\omega) = \left| \omega = \omega_0 + \frac{d\Delta k}{d\omega} \right| \omega = \omega_0(\omega - \omega_0) + \frac{d^2\Delta k}{2d\omega^2} \omega = \omega_0(\omega - \omega_0)^2 + \dots$$

Оценить допустимое отклонение частоты волны основного излучения при ГВГ в нелинейном кристалле.

58. Вывести закон сохранения энергии при генерации второй гармоники в условиях синхронизма.

59. В процессе генерации второй гармоники при существовании фазовой расстройки $\Delta k = k_2 - 2k_1 = \text{const} \neq 0$ разность фаз между волнами периодически меняется, интенсивность второй гармоники, рассчитанная в ПЗП, равна $I_2(z) = \frac{C}{(\Delta k)^2} \cdot \sin^2 \frac{\Delta k \cdot z}{2}$, где C – параметр, независящий от z и фазовой расстройки. Интенсивность гармоники периодически достигает максимума на длинах, кратных когерентной длине. Сперва происходит перекачка энергии волны основного излучения в гармонику, а затем имеет место обратный процесс и т.д.

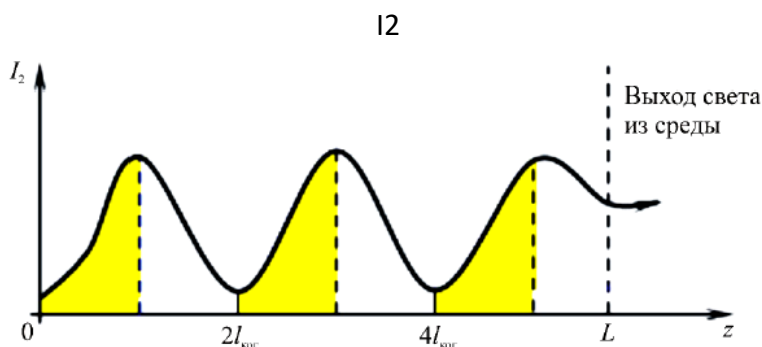


Рис. 10. Зависимость интенсивности второй гармоники от длины нелинейной среды.

При выполнении условия $n(2\omega) = n(\omega)$ происходит перекачка энергии основного излучения в волну гармоники на всем пути в нелинейной среде. Фазы волны гармоники в начале среды и в любой точке, которую она достигла, одинаковы. Благодаря интерференции световых волн, в любой точке среды амплитуда светового вектора гармоники будет расти пропорционально длине среды, т.е. происходит пространственное накопление нелинейного эффекта. Какая будет зависимость $I_2(z)$ для случая волнового синхронизма.

60. На рис. 11 показаны интерференционные зависимости, полученные для амплитуды второй гармоники. Волна гармоники рождается в разных частях нелинейной среды. Рассмотрено два варианта ГВГ: в условиях синхронизма и при волновой расстройке. Указать какой из рисунков соответствует режиму генерации при синхронизме.

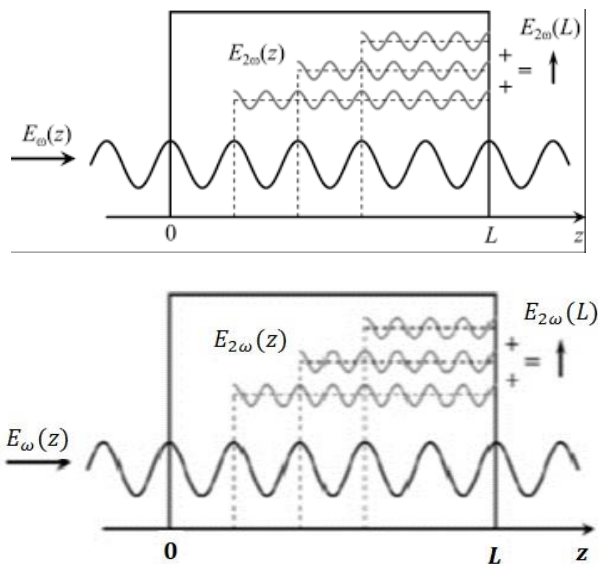


Рис. 11. Интерференционные зависимости для амплитуды второй гармоники.

61. В ПЗП интенсивность второй гармоники определяется следующим образом

$$I_2(z) \sim I_{10} z^2 \operatorname{sinc}^2 \frac{\Delta k z}{2},$$

где I_{10} — значение интенсивности накачки на входе в среду.

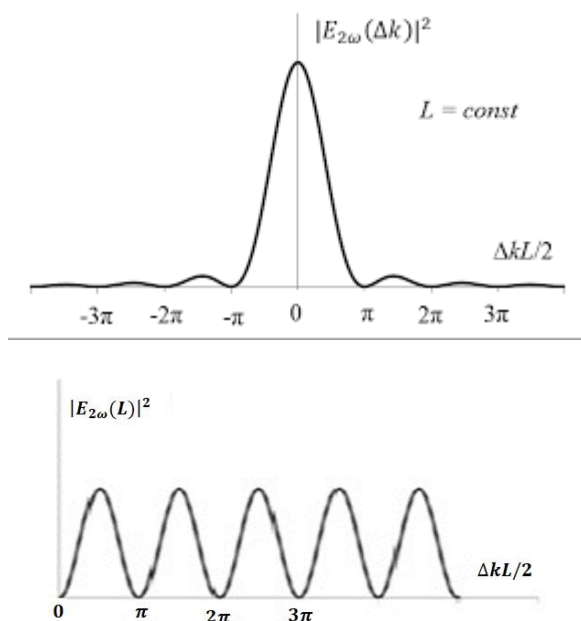


Рис. 12. Поведение интенсивность второй гармоники при синхронизме.

Какой из графиков рис. 12 построен при $z = \text{const.}$, а какой при $\Delta k = \text{const.}$?

62. Пусть направление волновых векторов основной волны и второй гармоники образует внутри кристалла толщиной L угол θ с нормалью к поверхности кристалла. Показатели пре-

ломления для основной волны и гармоники в направлении их распространения равны $n(\omega)$ и $n(2\omega)$. Определить эффективную толщину кристалла.

63. Излучение образует внутри кристалла толщиной L угол θ . Как в этом случае изменяется интенсивность ВГ, рассчитанная в ПЗП?]

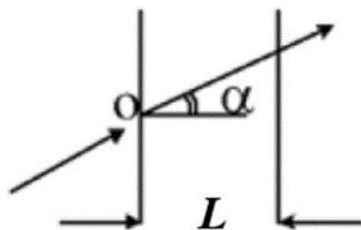


Рис. 13. Ход луча внутри кристалла.

64. Оценить влияние изменения частоты основного излучения, т.е. влияние ширины спектральной линии основного излучения на выполнение условия синхронизма при ГВГ.

65. Рассчитать эффективность преобразования во ВГ в кристалле KDP, где $\chi^{(2)} = 3 \cdot 10^{-9}$ СГСЭ, при мощности основного излучения 100 МВт/см^2 . Расчет вести в ПЗП, где эффективность преобразования $\eta_2 = (\chi^{(2)} \cdot A_1)^2$, где A_1 – амплитуда волны основного излучения.

66. В эксперименте П. Франкена по обнаружению ГВГ в кристалле кварца, где $n_2 - n_1 \cong 0.1$, использовалось излучение рубинового лазера на длине волны 0.694 мкм .

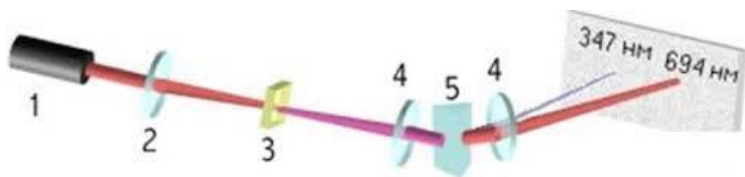


Рис. 14. Эксперименте П. Франкена по обнаружению ГВГ.

Чему равнялась когерентная длина l_{coh} в кристалле? Напомним, что в ПЗП нарастание интенсивности второй гармоники происходит на когерентной длине, определяемой из условия $\Delta k \cdot l_{coh} = \pi$.

67. Рассчитать когерентную длину, получаемую в KDP кристалле при генерации второй гармоники излучения Nd:YAG лазера ($\lambda=1.064$ мкм). Учесть, что рассматривается коллинеарное взаимодействие первого типа: показатель преломления для обыкновенной волны в кристалле на частоте накачки равен $n_o=1.4938$, а для необыкновенной волны на частоте гармоники равен $n_e = 1.4705$.

ТИПЫ СИНХРОНИЗМА

В нелинейной оптике рассматриваются как скалярный синхронизм, когда волновые векторы коллинеарны, так и векторный, когда волновые векторы имеют разное направление.

68. При трехчастотном параметрическом взаимодействии в квадратично нелинейной среде в результате нелинейного взаимодействия волны накачки на частоте ω_p и сигнальной волны на частоте ω_s возможна генерация холостой волны на разностной частоте $\omega_i = \omega_p - \omega_s$. Рассмотреть случай параметрической генерации при скалярном оо-е синхронизме. Для эффективного протекания данного процесса необходимо выполнение, как частотного соотношения, так и условия фазового синхронизма для волновых векторов $k_s^e + k_i^e = k_p^0$. Принимая длины волн основного излучения и сигнальной волны, соответственно равными $\lambda_p = 2.36$ мкм и $\lambda_s = 3.26$ мкм, определить λ_i для холостой волны.

69. При неколлинеарном трехволновом смешении на частотах ω_1 , ω_2 и ω_3 , где $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, написать условие фазового синхронизма для эффективного трехволнового взаимодействия.

70. В KDP кристалле для длины волны основного излучения $\lambda = 694$ мкм показатели преломления для обыкновенной и необыкновенных волн принимают значения $n_o = 1.506$, $n_e = 1.466$. Для волны второй гармоники $\lambda/2 = 0.347$ мкм $n_o = 1.534$, $n_e = 1.487$. Рассчитать угол синхронизма при оо-е типе взаимодействия.

71. На рис. 15 показана схема ГВГ при неколлинеарном оо-е взаимодействии. Две волны обыкновенная и необыкновенная

венная обе на частоте ω порождают необыкновенную волну на частоте 2ω . Полагаем, что направления распространения всех трех волн и оптическая ось кристалла лежат на одной плоскости, т.е. соответствующие волновые векторы компланарны и в той же плоскости расположена оптическая ось кристалла. Две волны на фундаментальной частоте ω и оптическая ось образуют углы θ_1 , θ_2 и θ с направлением волны гармоника. Для эффективной генерации второй гармоники основного излучения написать все соотношения, связывающие углы θ_1 , θ_2 и θ .

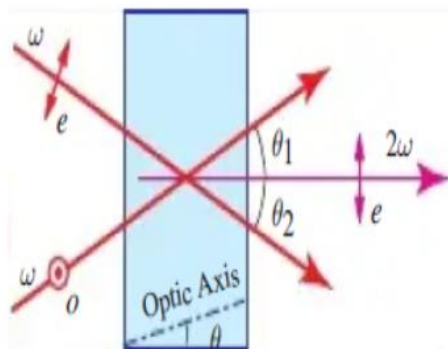


Рис. 15. ГВГ при векторном (неколлинеарном) II типе оое взаимодействия.

72. Рассчитать угол синхронизма при генерации второй гармоники для оое взаимодействия в KDP кристалле. Для волны основного излучения ($\lambda=1.064$ мкм) показатель преломления для обыкновенной волны в KDP кристалле принимает значение $n_o=1.4938$, а для волны второй гармоники ($\lambda/2 = 0.532$ мкм) показатели преломления для обыкновенной и необыкновенных волн соответственно равны $n_o=1.5123$, $n_e=1.4705$.

73. Рассмотреть случай оое взаимодействия в KDP кристалле длиной 1 см. Определить максимальную фазовую

(волновую) расстойку, получаемую из-за расходимости лазерного пучка при ГВГ в ПЗП. Условия предыдущей задачи.

74. В KDP кристалле для длины волны основного излучения, $\lambda=0.694$ мкм, показатели преломления для обыкновенной и необыкновенных волн принимают значения $n_o=1.506$, $n_e=1.466$, соответственно, а для волны второй гармоники, $\lambda/2=0.347$ мкм, соответственно равны $n_o=1.534$, $n_e=1.487$. Возможно ли ее взаимодействие волн при ГВГ в данном кристалле?

75. Рассчитать угол синхронизма при ГВГ в LiNbO_3 кристалле для ооо взаимодействия. Показатели преломления в LiNbO_3 кристалле принимают следующие значения: для обыкновенной волны на длине волны основного излучения $\lambda = 1.064$ мкм $n_o = 2.232$, а на частоте второй гармоники для обыкновенной и необыкновенных волн $n_o = 2.3232$, $n_e = 2.2342$, соответственно.

76. Доказать, что угол векторного ооо синхронизма больше угла скалярного оо-е синхронизма.

77. Показать, что угол векторного ооо синхронизма больше угла скалярного ооо синхронизма и угла скалярного ооо синхронизма.

78. Показать, что угол скалярного ооо синхронизма больше, чем угол векторного ооо синхронизма.

79. Под каким углом к грани кристалла должен падать луч неодимового лазера на KDP кристалл естественной огранки для ГВГ при ооо взаимодействии? Угол синхронизма в KDP кристалле на длине волны 1.064 мкм для данного типа взаимодействия равен $\theta_s=58.6^\circ$.

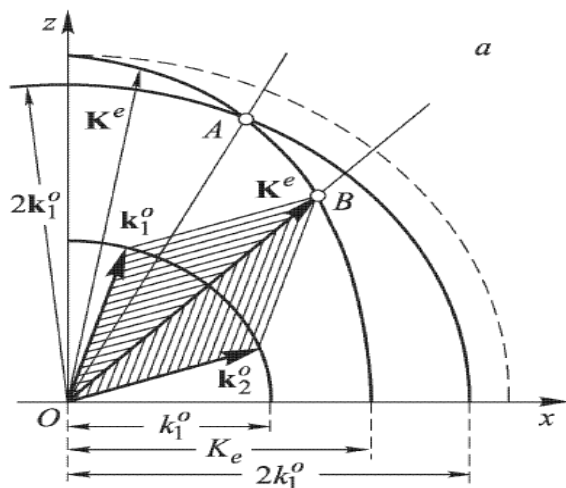


Рис. 16. Случаи векторного и скалярного оое синхронизма.

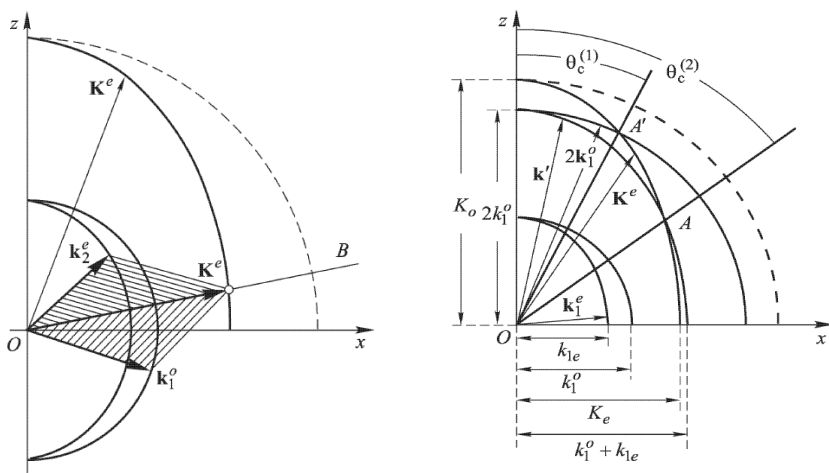


Рис. 17. Слева случай векторного оое синхронизма, справа – скалярного оое и оое синхронизма.

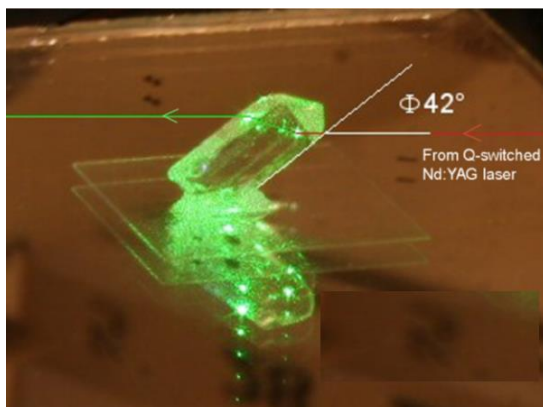


Рис. 18. Фото KDP кристалла, на который падает излучение Nd:YAG лазера.

80. Под каким углом к грани должен падать луч неодимового лазера на KDP кристалл естественной огранки (рис. 18) для режима ГВГ при ооо взаимодействии? Угол синхронизма в KDP кристалле на длине волны 1.064 мкм для данного типа взаимодействия равен $\theta_s = 40.9^\circ$.

81. Разложение расстройки волновых векторов Δk в ряд Тейлора по степеням угла отклонения от направления синхронизма θ_s имеет вид

$$\Delta k(\theta) = \Delta k(\theta_s) + \frac{d\Delta k}{d\theta} \big|_{\theta_s} (\theta - \theta_s) + \frac{d^2\Delta k}{2d\theta^2} \big|_{\theta_s} (\theta - \theta_s)^2 + \dots$$

При ГВГ расстройка волновых векторов в отрицательном кристалле ($n_o > n_e$) для синхронизма I типа ооо равна

$$\Delta k_{oee} = \frac{2\omega}{c} [n_e^{2\omega}(\theta) - n_o^\omega],$$

где

$$n_e^{2\omega}(\theta) = \frac{n_o^{2\omega} n_e^{2\omega}}{\sqrt{(n_o^{2\omega})^2 - [(n_o^{2\omega})^2 - (n_e^{2\omega})^2] \cos^2 \theta}}.$$

На рис. 19 дан эллипсоид показателей преломления для рассматриваемого случая.

Определить расстройку волновых векторов Δk для малых отклонений угла θ от угла синхронизма θ_s .

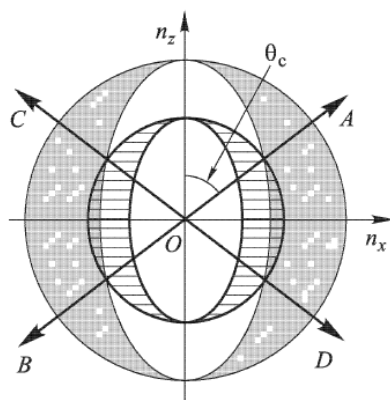


Рис. 19. Сечение индикатрисы показателя преломления для отрицательного нелинейного кристалла, оое взаимодействие.

82. При ГВГ в положительном кристалле ($n_e > n_o$) расстройка волновых векторов для синхронизма I типа ее-о равна $\Delta k_{eeo} = \frac{2\omega}{c} [n_o^{2\omega} - n_e^{2\omega}(\theta)]$. На рис. 20 дано сечение индикатрисы показателя преломления для рассматриваемого случая.

Определить расстройку волновых векторов Δk для малых отклонений угла θ от угла синхронизма θ_s .

83. При ГВГ в положительном кристалле ($n_e > n_o$) расстройка волновых векторов для синхронизма II типа еоо равна $\Delta k_{eoo} =$

$$\frac{\omega}{c} [n_o^{2\omega} - n_e^\omega(\theta) - n_o^\omega], \text{ где } n_e^\omega(\theta) = \frac{n_o^\omega n_e^\omega}{\sqrt{(n_o^\omega)^2 - [(n_o^\omega)^2 - (n_e^\omega)^2] \cos^2 \theta}}.$$

Благодаря расходимости сфокусированного лазерного пучка, оценить чувствительность синхронного процесса ГВГ к изменению угла между направлением луча основного лазерного излучения и оптической осью кристалла θ , т.е. определить расстройку волновых векторов Δk для малых отклонений угла θ от угла синхронизма θ_s .

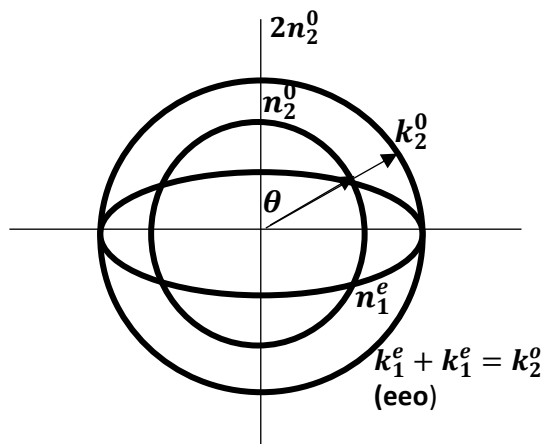


Рис. 20. Сечение индикатрисы показателя преломления для положительного нелинейного кристалла, еео взаимодействие.

84. Определить расстройку волновых векторов Δk при малых отклонениях угла θ от угла синхронизма θ_s в кристаллах с малым двулучепреломлением и слабой дисперсией.

85. При ГВГ в положительном кристалле ($n_e > n_o$) с 90° синхронизмом (взаимодействие еео, рис. 21) получить выражение для расстройки волновых векторов.

86. При ГВГ в отрицательном кристалле ($n_o > n_e$) с 90° синхронизмом оценить чувствительность синхронного процесса ГВГ к изменению угла между направлением луча основ-

ного лазерного излучения и оптической осью кристалла θ (взаимодействие II типа ое-е), т.е. определить расстройку волновых векторов Δk для малых отклонений угла θ от угла синхронизма θ_s .

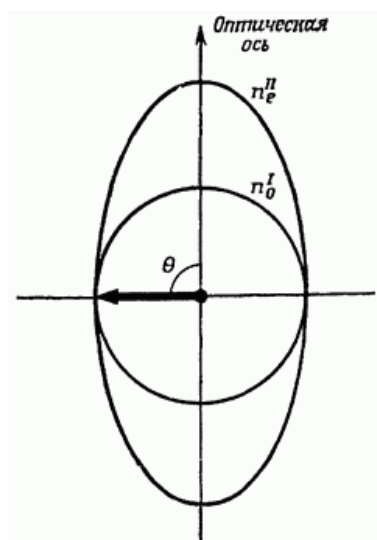


Рис. 21. Положительный кристалл. Угол синхронизма равен 90° .

87. При 90° угле синхронизма в отрицательном кристалле оценить чувствительность синхронного процесса ГВГ к изменению угла между направлением луча основного лазерного излучения и оптической осью кристалла θ (взаимодействие I типа оо-е), т.е. определить расстройку волновых векторов Δk для малых отклонений угла θ от угла синхронизма θ_s .

88. Показать, что при 90° синхронизме сноса энергии необыкновенного луча из-за двулучепреломления не происходит.

89. Почему кристаллы с 90° синхронизмом не критичны к выставлению угла синхронизма. Показать, что при 90° синхронизме $\Delta k \sim \Delta \theta^2$, в отличие от других случаев.

90. Эллипсоид показателя преломления (или оптическая индикатриса, поверхность значений показателей преломления) для нелинейного кристалла используется для определения двух характерных (разрешенных) ортогональных друг другу направлений поляризации. Этим направлениям соответствуют различные значения показателя преломления. Объяснить распространение света в кристалле в случае, если:

- падающий свет не поляризован ни в одном из этих двух выделенных направлениях,
- падающий свет линейно поляризован в направлении, не совпадающем с этими направлениями в кристалле.

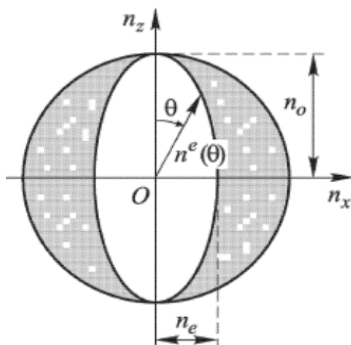


Рис. 22. Сечения индикатрис показателя преломления отрицательного одноосного кристалла.

91. В случае отрицательного одноосного кристалла вывести соотношение для фазовой скорости необыкновенной волны в зависимости от угла θ .

92. На примере отрицательного одноосного кристалла, используя сечения индикатрисс показателя преломления, показать сколько существует направлений, вдоль которых выполняется условие фазового синхронизма.

93. Написать закон Снеллиуса для анизотропного материала.

СИММЕТРИЯ КРИСТАЛЛОВ

Как известно, тензор ранга N имеет N индексов, каждый из которых в трехмерном пространстве принимает значения от 1 до 3. Отсюда тензор ранга N имеет 3^N составляющих. Так, например, $D_i = \varepsilon_{ij}E_j$ запись означает, что тензор диэлектрической проницаемости ε_{ij} связывает каждую компоненту электрической индукции D_i с тремя компонентами поля E_j , где $j = 1 \div 3$. Иначе можем написать $D_i = \varepsilon_{ix}E_{ix} + \varepsilon_{iy}E_y + \varepsilon_{iz}E_z$. В данном примере ε_{ij} тензор второго ранга, поэтому у него 9 компонент. Тогда в квадратичной среде, где восприимчивость – есть тензор третьего ранга, получаем $3^3 = 27$ компонент квадратичной восприимчивости, а в кубической среде – $3^4 = 81$ компонента кубической восприимчивости.

94. В анизотропных кристаллах тензор диэлектрической проницаемости второго ранга связывает компоненты вектора электрической индукции с тремя компонентами напряженности электрического поля $D_i = \varepsilon_{ij}E_j$, где подразумевается суммирование по повторяющемуся индексу. Раскрыть выражение суммы для плотности энергии электрического поля $W_e = \frac{1}{8\pi}(E \cdot D) = \frac{1}{8\pi}E_j\varepsilon_{jk}E_k$ и написать W_e для главных диэлектрических координатных осей, т.е. привести ε_{kk} матрицу к диагональному виду.

95. Эффективность частотного преобразования пропорциональна отношению d^2/n^3 , где d – нелинейный коэффициент преобразования пропорциональный нелинейной восприимчивости материала, а n – показатель преломления среды, где происходит частотное преобразование. Почему при выборе нелинейного материала необходимо учитывать не только нелинейный коэффициент преобразования d , пропорциональный нелинейной восприимчивости материала, но также и показатель преломления материала на рассматриваемой частоте n ?

96. Симметрия среды определяет число ненулевых компонент в разложении поляризованности. Тензор третьего ранга $\chi_{ikj}^{(2)}$, связанный с квадратичной нелинейностью среды, имеет 27 независимых компонент. Почему это число уменьшается до 18?

97. Уравнения Селлмейера для $\text{AgGa}_{0.7}\text{In}_{0.3}\text{Se}_2$ кристалла имеют вид:

$$n_o^2 = 4.490608 + \frac{1.97894}{1 - 0.25916/\lambda^2} + \frac{1.6729}{1 - 1600/\lambda^2}$$

$$n_e^2 = 5.30884 + \frac{1.46276}{1 - 0.36898/\lambda^2} + \frac{1.72572}{1 - 1600/\lambda^2}$$

В формулах значения длин волн излучения λ даны в мкм. Рассчитать угловой дисперсионный коэффициент первого порядка при ГВГ основного излучения на длине волны $\lambda = 9.55$ мкм в данном кристалле при ооо взаимодействии.⁹

98. Уравнения Селлмейера для LiNbO_3 кристалла имеют вид:

$$n_o^2 = 4.9048 + \frac{0.11768}{\lambda^2 - 0.04750} - 0.0271 \cdot \lambda^2,$$

$$n_e^2 = 4.5820 + \frac{0.099169}{\lambda^2 - 0.04443} - 0.02195 \cdot \lambda^2.$$

В формулах значения длин волн λ даны в мкм. Рассчитать показатели преломления для обыкновенной и необыкновенной волн для излучений Nd:YAG лазера ($\lambda = 1.064$ мкм) и He – Ne

⁹Rena J. Kasumova. Second harmonic of laser radiation for IR-range in mixed $\text{AgGa}_{0.6}\text{In}_{0.4}\text{Se}_2$ crystals. An Indian J: Material Science, 2014, 10(8) 306-311.

лазера ($\lambda=0.6328$ мкм). К какому типу кристаллов относится LiNbO₃?

99. Уравнения Селлмейера для KDP кристалла имеют вид:

$$n_o^2 = 2.259276 + 13.00522 \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 400} + \frac{0.01008956}{\lambda^2 - (77.26408)^{-1}},$$

$$n_e^2 = 2.132668 + 3.2279924 \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 400} + \frac{0.008637494}{\lambda^2 - (81.42631)^{-1}}.$$

В формулах значения длин волн излучения λ даны в мкм. Рассчитать показатели преломления для обыкновенной и необыкновенной волн для длины волны основного излучения $\lambda=1.064$ мкм и второй гармоники 0.532 мкм. К какому типу кристаллов относится KDP?

100. Уравнение Селлмейера для KDP и ADP

$$n^2 = A + \frac{B^2 v^2}{1 - v^2/C} + \frac{D}{E - v^2},$$

Таблица 2

	KDP		ADP	
	<i>e</i>	<i>o</i>	<i>e</i>	<i>o</i>
A	2,133831	2,260476	2,164692	2,304082
B	$8,653247 \cdot 10^{-11}$	$1,01279 \cdot 10^{-10}$	$9,633312 \cdot 10^{-11}$	$1,114773 \cdot 10^{-10}$
C	$8,134538 \cdot 10^9$	$7,726552 \cdot 10^9$	$7,691000 \cdot 10^9$	$7,542305 \cdot 10^9$
D	$8,069838 \cdot 10^5$	$3,249268 \cdot 10^6$	$1479865 \cdot 10^6$	$3,774363 \cdot 10^6$
E	$2,500000 \cdot 10^5$	$2,500000 \cdot 10^5$	$2,500000 \cdot 10^5$	$2,500000 \cdot 10^5$

Определить угол синхронизма для скалярного взаимодействия оо-е: в KDP кристалле на длине волны излучения 0.808 мкм титан сапфирового лазера и в ADP кристалле на длине волны второй гармоники неодимового лазера.

ПЕРСПЕКТИВНЫЕ КРИСТАЛЛЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИКИ. КРИТИЧНОСТЬ К СИНХРОНИЗМУ

Современный уровень развития общества определяется объемом передаваемой информации. Этому способствует развитие информационных технологий, создание глобальной компьютерной сети Internet. Для осуществления этих задач одним из наиболее перспективных и активно развивающихся направлений науки и технологии является разработка относительно дешевых малогабаритных перестраиваемых источников когерентного излучения в УФ, видимой и ИК областях спектра.

Как известно, новые источники когерентного оптического излучения можно создавать методами нелинейной оптики, не прибегая к принципу вынужденного излучения. В частности, преобразование энергии лазерного излучения из одной области спектра в другую удастся реализовать, используя процессы умножения и смещения оптических частот. Особенно это актуально для тех областей спектра, которые не освоены существующими лазерами. Перестраиваемые параметрические источники когерентного излучения в сочетании с эффектами смещения частот позволяют существенно расширить область перестраиваемых длин волн лазерного излучения. Так, например, используя генерацию суммарной частоты, возможно получение перестраиваемого лазерного излучения в коротковолновом диапазоне спектра вплоть до ВУФ. Генерация гармоник привлекательна для решения ряда прикладных задач в УФ и в дальней УФ областях спектра, для получения фотонов высокой энергии.

Помимо коротковолновой области спектра для приложений крайне важна ИК область спектра, где, как известно, существуют два окна прозрачности атмосферы. Перестраиваемое по частоте когерентное излучение имеет широкое приложение, например, на базе параметрических преобразователей частоты разрабатываются лидары (LIDAR – Light Detection and

Ranging), в частности, для исследования Земли и атмосферы. Несмотря на важность приложений, все еще не разработан нелинейный кристалл, обеспечивающий плавную перестройку лазерного излучения во всем оптическом диапазоне.

Манипуляция лазерным излучением реализуется в фотонических кристаллах.¹⁰ В анизотропных кристаллах степень поглощения различных длин волн видимого света зависит как от химического состава кристалла (как у изотропных веществ), так и от ориентации луча света относительно оптических осей кристалла. Надо отметить, что предметы не имеют цвета и понятие цвета появляется в процессе поглощения световых волн. То есть, если мы видим, что предмет определенного цвета, это является следствием того, что молекулярный состав его поверхности таков, что он поглощает все волны, кроме данного цвета.

К настоящему времени достигнуты значительные успехи в применении нелинейных кристаллов в многочисленных устройствах ИК диапазона. Среди них можно отметить перспективные кристаллы $A^{II}B^{VI}$. Например, гексогональные одноосные кристаллы CdS , $CdSe$ и их твердые растворы $CdS_{1-x}Se_x$, а также $ZnSe$ и $Zn_{1-x}Mg_xSe$. Как известно выбором параметра x в подобных соединениях смешанного типа можно менять ширину запрещенной зоны, кристаллическую структуру и постоянную решетки в широком интервале значений. На базе смешанных кристаллов разрабатываются перестраиваемые по частоте лазеры, которые актуальны, в частности, при дистанционном зондировании атмосферы и для задач высокочувствительной спектроскопии.

В настоящее время продолжается поиск кристаллов, для которых выполняется условие не критичного фазового синхронизма при длине накачки, изменяющейся в широком диапазоне частот. Для решения этой задачи предлагается использовать

¹⁰Z. Yang, A. Joshi, Rena J. Kasumova, Y. Rostovtsev. Manipulation of light propagation in photonic crystal. *JOSA B*, 2015, v. 32, No. 10, p. 2122-2128.

тройные халькогенидные соединения. Для освоения ИК области наиболее часто используется излучение CO_2 лазера, генерирующего на длинах волн, попадающих в окно прозрачности атмосферы (8 – 13,5 мкм). Для этого лазера характерен высокий КПД (30%) при высокой мощности (десятки киловатт) излучения в непрерывном режиме. Эффективная ГВГ излучения этого лазера позволит реализовать перестраиваемое когерентное излучение в диапазоне от 4,5 до 5,5 мкм. Также для этих целей применяют ТЕА CO_2 лазеры и лазеры на свободных электронах.

Также востребованы кристаллы, для которых выполняется эффективное преобразование оптической частоты вниз в среднем ИК-диапазоне, где длина волны накачки колеблется вблизи 1 мкм. Наиболее перспективной кажется параметрическая генерация вблизи 6 мкм, которая интересна для медицинских приложений. Несмотря на важность приложений, нелинейные кристаллы, обеспечивающие плавную перестройку лазерного излучения во всем среднем ИК-диапазоне, до сих пор не разработаны.

В последние годы предметом исследований стали нелинейные кристаллы смешанного типа. Это связано с тем, что для реализации эффективной перестройки излучения в широком диапазоне спектра необходимы нелинейные кристаллы, для которых выполняется условие не критичного фазового синхронизма в выбранном диапазоне спектра. В соединениях смешанного типа за счет увеличения содержания одного элемента и уменьшения содержания другого экспериментально показана возможность разработки кристаллов с не критичным фазовым синхронизмом на выбранной длине волны излучения. Из кристаллов смешанного типа в качестве примера можно привести $\text{AgGaIn}_{1-x}\text{Se}_2$, $\text{AgGa}(\text{Se}_{1-x}\text{S}_x)_2$ и $\text{Zn}_{1-x}\text{Mg}_x\text{Se}$. Исследованы оптические свойства этих кристаллов, экспериментально определены коэффициенты в уравнениях Селлмейера, с помощью которых построены кривые фазового синхронизма для генерации второй гармоники CO_2 лазера.

Активно применяются перспективные кристаллы CdGeAs_2 , а также доступные кристаллы ZnGeP_2 , AgGaS_2 и AgGaSe_2 и др. Отбор нелинейных кристаллов определяется требованием получения высокой эффективности преобразования излучения накачки в широкой спектральной области перестройки частоты. В качестве одного из способов решения этой проблемы предлагается использовать кристаллы структуры халькогенидов или халькопиритов, например, $\text{AgGa}_x\text{In}_{1-x}\text{Se}_2$, $\text{AgGa}(\text{Se}_{1-x}\text{S}_x)_2$. В подобных кристаллах за счет изменения параметра x возможно реализовать некритичный 90° -ый фазовый синхронизм. Данное условие обеспечивает отсутствие сноса энергии второй гармоники, исключаящее уменьшение эффективности генерации второй гармоники за счет двулучепреломления. Для кристалла смешанного типа $\text{AgGa}_x\text{In}_{1-x}\text{Se}_2$, отметим ряд его достоинств. Как показали исследования, подбором содержания индия можно осуществить условие некритичного 90° -го фазового синхронизма при генерации второй гармоники в ближнем и среднем ИК диапазоне. При этом величина параметра x на длине волны излучения CO_2 лазера $\lambda = 9,64$ мкм равняется 0,6. Измеренная величина квадратичной нелинейной восприимчивости для кристалла $\text{AgGa}_{0,6}\text{In}_{0,4}\text{Se}_2$ равняется $d_{36}=41$ пм/В. Для сравнения аналогичная уточненная величина для кристалла AgGaSe_2 равна 39 пм/В.

Для частотного преобразования лазерного излучения в ИК область спектра наиболее часто используют кристаллы CdGeAs_2 (CGA). Они отличаются среди других прозрачных в этой области спектра кристаллов чрезвычайно высокой квадратичной нелинейностью 236 пм/В. Для сравнения в ближней ИК области спектра ($\lambda > 1$ мкм) в часто используемом удвоителе LiNbO_3 максимальный нелинейный коэффициент d_{33} составляет 34,4 пм/В, а в средней ИК области спектра для этих целей применяют ZnGeP_2 (ZGP) с нелинейностью второго порядка, равной 75 пм/В. В последнее время возросший интерес к CGA кристаллам связан с успехами в технологической их раз-

работке, а именно в получении подобных сред с улучшенными оптическими качествами, достаточно больших размеров и высокой лучевой стойкостью. Это позволило экспериментально получить в CGA кристалле эффективность преобразования излучения CO₂ лазера во вторую гармонику, равную 28% при комнатной температуре, и 50% при криогенных температурах 77 К. Кроме того сообщается о реализованной внутренней эффективности удвоения частоты излучения на 10 мкм лазера на свободных электронах, равной 62% при интенсивности накачки в 380 MW/cm² для пикосекундных импульсов длительностью 3.9 пс на толщине кристалла 7 мм.

Для задач плавной перестройки частоты излучения во всем среднем ИК-диапазоне предлагается использовать тройные халькогениды. Неоксидные нелинейно-оптические кристаллы LiGaS₂ и BaGa₄S₇ прозрачны выше ~5 мкм (до 12 мкм) в среднем ИК-диапазоне. В то же время кристалл LiGaS₂ обладает наибольшей энергией запрещенной зоны $E_g \sim 4,15$ эВ согласно одним данным и 3,76 эВ по другим данным при комнатной температуре среди всех существующих нелинейных кристаллов для среднего ИК-диапазона. Аналогичное значение для BaGa₄S₇ равно 3,54 эВ. Поэтому при накачке на относительно коротких длинах волн (1 мкм) в случае этих кристаллов процессы двухфотонного поглощения не рассматриваются. Несмотря на самые низкие нелинейные коэффициенты, т.е. $d_{eff}=5,5$ пм/В (для LiGaS₂, фазовый синхронизм еое типа II в плоскости xy) и $d_{eff}=5,1$ пм/В (для BaGa₄S₇, фазовый синхронизм I типа оое в плоскости xz) эти халькогениды обладают высоким порогом разрушения на длине волны 1,064 мкм с импульсами наносекундной длительности. Эта особенность может позволить реализовать в этих кристаллах более высокий КПД преобразования (за счет наиболее высокого порога повреждения), который был экспериментально реализован. На основе этих кристаллов можно реализовать параметрическое взаимодействие, где в качестве источника накачки можно ис-

пользовать технологически развитые и популярные Nd:YAG-лазеры. Таким образом, кристаллы LiGaS_2 и BaGa_4S_7 весьма привлекательны для оптических параметрических генераторов при преобразовании частоты в средний ИК-диапазон.

В среднем инфракрасном диапазоне спектра перспективны соединения $\text{GaS}_x\text{Se}_{1-x}$. Наблюдаемое сильное уменьшение константы нелинейной связи с увеличением содержания серы и ухудшение качества кристаллов по сравнению с двумя исходными соединениями, GaS и GaSe, очевидно, способствовало отсутствию интереса к дальнейшему исследованию таких твердых растворов. Как известно, двухфотонное поглощение является нежелательным нелинейным процессом более высокого порядка, которого можно избежать при 1.064 мкм только в очень немногих халькогенидных соединениях, большинство из которых имеют малую нелинейность. Исследования показали, что коэффициент двухфотонного поглощения GaSSe на длине волны 1.064 мкм в 3,5 раза ниже, чем в GaSe, а его микротвердость повышена на 30% по сравнению с GaSe. Таким образом, более поздние исследования свидетельствовали, что кристаллы $\text{GaS}_x\text{Se}_{1-x}$ являются перспективным нелинейным материалом для частотного преобразования вниз импульсов на $\lambda=1.064$ мкм (в средний ИК-диапазон выше 5 мкм) без значительного двухфотонного поглощения. Ожидается, что при $x=0.4$ ряд его характеристик сделает это соединение пригодным для разработки оптических параметрических генераторов наносекундной/пикосекундной накачки или оптических параметрических генераторов/усилителей на длине волны 1.064 мкм (лазерные системы Nd:YAG) без возникновения двухфотонного поглощения. Таким образом, на основе этих кристаллов можно производить параметрическую генерацию, где в качестве источника накачки можно использовать технологически развитые и популярные Nd:YAG-лазеры.

В последнее время активно разрабатываются неоксидные халькогенидные кристаллы тиогаллата ртути HgGa_2S_4 и тиогал-

лата кадмия ртути $\text{Hg}_{1-x}\text{Cd}_x\text{Ga}_2\text{S}_4$. Эти кристаллы успешно используются при параметрической генерации в среднем ИК диапазоне спектра. Возросший интерес к данному типу халькогенидных кристаллов связан с успехами в их технологической разработке, а именно в получении подобных сред с улучшенными оптическими качествами, достаточно больших размеров. Выбор кристаллов тiogаллата ртути объясняется рядом причин. Во-первых, базируясь на данных кристаллах, возможно, создать оптические параметрические генераторы, для которых в качестве излучения накачки применяется технологически развитый и широко распространенный Nd:YAG-лазер. Следующая причина – их высокий коэффициент пропускания излучения в диапазоне от десятых долей микрометра до 12 – 15 мкм. Кроме того, данные кристаллы обладают высокой нелинейной восприимчивостью, лучевой стойкостью и механической прочностью. Согласно данным, кристаллы $\text{Hg}_{1-x}\text{Cd}_x\text{Ga}_2\text{S}_4$ по коэффициенту качества в зависимости от области прозрачности опережают десяток перспективных кристаллов, уступая лишь четырем кристаллам CGA, CSP, ZGP и GaSe. Из проведенных исследований следует, что введение кадмия в тiogаллат ртути изменяет главные значения показателей преломления и величину нелинейности в кристалле $\text{Hg}_{1-x}\text{Cd}_x\text{Ga}_2\text{S}_4$. Так, например, если в HgGa_2S_4 эффективный нелинейный коэффициент равен 15.57 pm/V, то в кристалле $\text{Hg}_{1-x}\text{Cd}_x\text{Ga}_2\text{S}_4$ эта величина в 1.6 раз больше и равна 24.94 pm/V. Экспериментальные исследования упомянутых авторов показывают, что величина двулучепреломления очень чувствительна к параметру x . Отсюда можно, меняя долю Cd в кристалле, регулировать двулучепреломление, условие фазового синхронизма и возможно осуществить режим не критичного фазового синхронизма. Получено, что в процессе роста кристалла реализуется изменение концентрации кадмия x по длине роста. Это дает возможность разработки преобразователя частоты за счет плавного изменения x . Последнее осу-

ществляется при линейном перемещении кристалла по отношению к лазерному пучку накачки. При этом условие не критичного фазового синхронизма не нарушается.

101. Рассмотрим взаимодействие волн при ГВГ в кристалле с квадратичной нелинейностью для случая ооо скалярного синхронизма первого типа. Определить внешний угол синхронизма (см. рис. 22).

102. Рассмотрим параметрическое взаимодействие волн в кристалле с квадратичной нелинейностью для случая ооо скалярного синхронизма второго типа. Фазовая расстройка равна $\Delta k = k_p - k_s - k_i$. Получить аналитическое выражение для внутреннего угла синхронизма $\theta_{s, \text{internal}}$.

103. Рассмотрим параметрическое взаимодействие волн в кристалле с квадратичной нелинейностью для случая ооо скалярного синхронизма второго типа. Фазовая расстройка равна $\Delta k = k_p - k_s - k_i$. Получить аналитическое выражение для углового дисперсионного коэффициента первого порядка $\left. \frac{\partial \Delta k}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_s}$.

104. Оценить угол отклонения от направления синхронизма $\Delta \theta$ для отрицательного одноосного кристалла KDP в случае ГВГ излучения на длине волны 1.06 мкм (синхронизм первого типа, взаимодействие ооо). Показатели преломления на $\lambda = 1.06$ мкм: $n_e^\omega = 1.4599$, $n_o^\omega = 1.4938$.¹¹

105. На рис. 23 даны зависимости эффективности преобразования во вторую гармонику от фазовой расстройки в двух кристаллах, рассчитанные в ПЗИ. Как можно судить из поведения кривых о критичности данных кристаллов к выставлению

¹¹*Rena J. Kasumova. Second optical harmonic generation of CO₂ laser radiation in CGA crystal. *J. of Nonlinear Optical Physics & Materials*, 2013, **22**(2), 1350023-1-13.

угла синхронизма?^{12*}

Какой из кристаллов менее критичен к выставлению рассчитанного угла синхронизма?

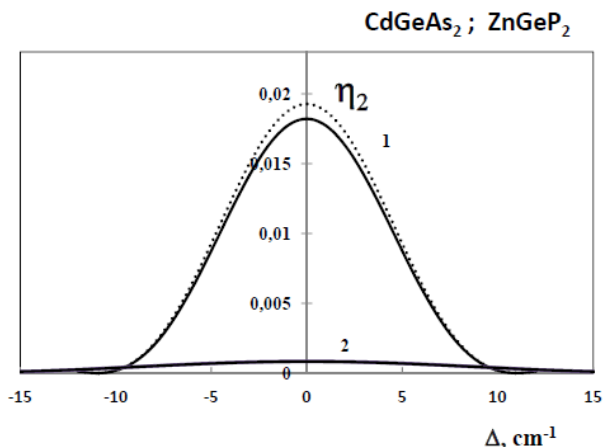


Рис. 23. Зависимости эффективности преобразования во вторую гармонику от фазовой расстройки в случае кристалла CGA для двух значений потерь (сплошная и точечная кривые 1). Здесь же аналогичного характера зависимость дана для кристалла ZGP (кривая 2).

106. Рассмотрим взаимодействие волн в ПЗИ при ГВГ в кристалле с квадратичной нелинейностью для случая ее скалярного синхронизма первого типа. Для эффективности преобразования во вторую гармонику $\eta_2(l) = I_2(l)/I_{10}$ на выходе кристалла ($z = l$) получается следующее выражение:

$$\eta_2(l) = \gamma_2^2 I_{10} l^2 \text{sinc}^2 \lambda l \exp[-(\delta_2 + 2\delta_1)l],$$

где $\lambda^2 = 2\Gamma^2 - (\delta_2 - 2\delta_1 + i\Delta)^2/4$, $\gamma_{1,2}$ – коэффициенты нелинейной связи волн, $\Gamma^2 = \gamma_1\gamma_2 I_{10}$, $\text{sinc} x = \sin x/x$, $\Delta k = k_2 - 2k_1$

¹²Rena J. Kasumova. Second optical harmonic generation of CO₂ laser radiation in CGA crystal. *J. of Nonlinear Optical Physics & Materials*, 2013, **22**(2), 1350023-1-13.

– фазовая расстройка, $\delta_{1,2}$ – коэффициенты поглощения для волн на частотах $\omega_{1,2}$ соответственно. На рис. 24 зависимости эффективности $\eta_2(l)$ от длины кристалла показаны при разных значениях фазовой отстройки. Видно, что с увеличением фазовой расстройки как эффективность преобразования, так и период осцилляций уменьшаются (сравнить кривые 1 – 4). При этом когерентная длина кристалла, соответствующая максимуму $\eta_2(l)$, также уменьшается.

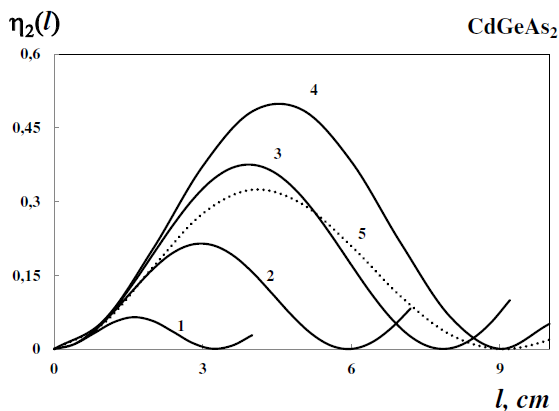


Рис. 24. Зависимость эффективности преобразования во вторую гармонику основного излучения $\eta_2(l)$ ($\lambda=10.6$ мкм) от длины l CGA кристалла, полученная в ПЗИ для $\delta_{1,2}=0$ (curves 1 – 4), 0.05 см^{-1} (штриховая линия 5) и интенсивности накачки $I_{10}=0.0012 \text{ МВт/см}^2$ при $\Delta=1.8 \text{ см}^{-1}$ (кривая 1), 0.8 см^{-1} (кривая 2), 0.4 см^{-1} (кривая 3) и 0.0028 см^{-1} (кривые 4 и 5).

Рассчитать:

- на сколько увеличивается эффективность преобразования с уменьшением фазовой расстройки от $\Delta=1.8 \text{ см}^{-1}$ до 0.0028 см^{-1} .
- почему с увеличением фазовой расстройки уменьшается когерентная длина кристалла?

• оценить угол отклонения от направления синхронизма $\Delta\theta$ для положительного одноосного кристалла CGA в случае ГВГ излучения на длине волны 10.6 мкм (синхронизм первого типа, взаимодействие еео). Расчет для показателей преломления на $\lambda = 10.6$ мкм дал следующие значения: $n_e^\omega = 3.5911$, $n_o^\omega = 3.5046$ ¹³.

107. Рассчитать в ПЗИ угол синхронизма θ_s и угловой дисперсионный коэффициент первого порядка в отрицательном AgGa(Se_{1-x}S_x)₂ кристалле при ГВГ излучения CO₂ лазера на длинах волн: 9.31 мкм, 9.55 мкм и 9.64 мкм (оо-е взаимодействие) при пяти значениях параметра x .¹⁴

Необходимые данные по кристаллу приведены в таблице 3.

Таблица 3

x	λ мкм	n_o^ω	n_e^ω	$n_o^{2\omega}$	$n_e^{2\omega}$	d_{36} , пм/В	Тип взаимо- действия
1	2	3	4	5	6	7	8
0	9.31	2.597798	2.564778	2.615886	2.583349	39.0	оое
0	9.55	2.596647	2.563607	2.615434	2.582876	39.0	оое
0	9.64	2.596208	2.56316	2.615267	2.582701	39.0	оое
0.1	9.31					no data	оое
0.1	9.55	2.57121	2.539504	2.591704	2.560677	no data	оое
0.1	9.64	2.570707	2.538984	2.591535	2.50502	no data	оое
0.2	9.31					33.5 [9]	оое
0.2	9.55	2.551289	2.514641	2.626432	2.608496	33.5 [9]	оое
0.2	9.64	2.550734	2.514072	2.57347	2.537352	33.5 [9]	оое
0.4	9.31					no data	оое
0.4	9.55	2.501129	2.46417	2.527275	2.490613	no data	оое
0.4	9.64	2.500465	2.463499	2.527078	2.490413	no data	оое
1.0	9.31					12.0	оое
1.0	9.55	2.362347	2.308471	2.399047	2.345804	12.0	оое
1.0	9.64	2.361373	2.307477	2.398805	2.34556	12.0	оое

¹³Rena J. Kasumova. Second optical harmonic generation of CO₂ laser radiation in CGA crystal. *J. of Nonlinear Optical Physics & Materials*, 2013, **22**(2), 1350023-1-13.

¹⁴Rena J. Kasumova. Conversion efficiency in AgGa(Se_{1-x}S_x)₂ crystals. *International J. Of Science and Research*, 2014, v.3, Issue 10, p. 410-413.

108. В ПЗИ оценить угол отклонения от направления синхронизма $\Delta\theta$ для положительного одноосного кристалла ZGP в случае ГВГ излучения на длине волны 10.6 мкм (синхронизм первого типа, взаимодействие еео). Расчет для показателей преломления на $\lambda = 10.6$ мкм дал следующие значения: $n_e^\omega = 3.1119$, $n_o^\omega = 3.0725$.¹⁵

109. Оценить угол отклонения от направления синхронизма $\Delta\theta$ в случае ГВГ излучения на длине волны 9.55 мкм (взаимодействие оое) в кристалле смешанного типа $\text{AgGa}_{0.6}\text{In}_{0.4}\text{Se}_2$. Расчет для показателей преломления на $\lambda=9.55$ мкм дал следующие значения: $n_o^\omega=2.60868$, $n_e^\omega=2.58986$.¹⁶

110. Рассчитать из рис. 31 угол синхронизма θ_s и угол отклонения $\Delta\theta$ от направления фазового синхронизма в отрицательном $\text{AgGa}_{0.7}\text{In}_{0.3}\text{Se}_2$ кристалле при ГВГ излучения на длине волны 9.55 мкм (оое скалярное взаимодействие).¹⁷

111. Рассчитать угол синхронизма θ_s и угол отклонения $\Delta\theta$ от направления фазового синхронизма в положительном $\text{Zn}_{0.52}\text{Mg}_{0.48}\text{Se}$ кристалле при параметрической генерации излучения на длине волны 3.6 мкм (оое взаимодействие).¹⁸

112. Рассмотрим удвоение частоты в ZnO структуре, обладающей квадратичной нелинейностью. Анализ процесса в

¹⁵Rena J. Kasumova. Second optical harmonic generation of CO_2 laser radiation in CGA crystal. *J. of Nonlinear Optical Physics & Materials*, 2013, **22**(2), 1350023-1-13.

¹⁶Rena J. Kasumova. Second harmonic of laser radiation for IR-range in mixed $\text{AgGa}_{0.6}\text{In}_{0.4}\text{Se}_2$ crystals. *An Indian J: Material Science*, 2014, **10**(8), 306-311.

¹⁷Rena J. Kasumova. Second harmonic of laser radiation for IR-range in mixed $\text{AgGa}_{0.6}\text{In}_{0.4}\text{Se}_2$ crystals. *An Indian J: Material Science*, 2014, **10**(8), 306-311.

¹⁸Rena J. Kasumova. SHG in IR region in mixed $\text{Zn}_{1-x}\text{Mg}_x\text{Se}$ crystals. *American J. of Optics and Photonics*, 2013, **1**(4), 23-27.

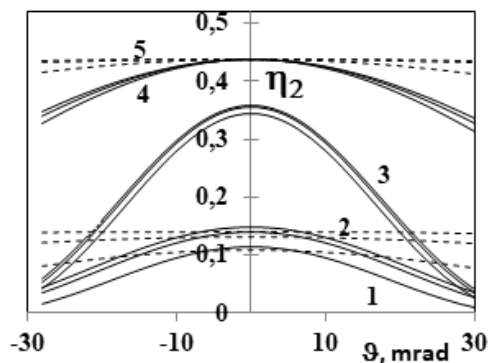


Рис. 25. Зависимости эффективности преобразования во вторую гармонику η_2 от фазовой расстройки в $\text{AgGa}_x\text{In}_{1-x}\text{Se}_2$ кристалле, рассчитанные в ПЗИ. При $x=0.7$, т.е. кристаллу $\text{AgGa}_{0.7}\text{In}_{0.3}\text{Se}_2$ соответствуют кривые 1 and 4, где $l = 1.05$ см, (кривая 1), а 0.65 см (кривая 4).

Таблица 4¹⁹

Crystal	λ мкм	n_0^ω	n_e^ω	Phase matching type
$\text{Zn}_{0.52}\text{Mg}_{0.48}\text{Se}$	2.36 (pump)	2.17527	2.19349	$o \rightarrow ee$
$\text{Zn}_{0.52}\text{Mg}_{0.48}\text{Se}$	3.26 (signal)	2.16230	2.17998	$o \rightarrow ee$
$\text{Zn}_{0.52}\text{Mg}_{0.48}\text{Se}$	8.54 (idler)	2.14883	2.16589	$o \rightarrow ee$

ПЗИ позволяет получить следующее выражение для интенсивности ВГ

$$I_2(\ell) = \gamma_2^2 I_{10}^2 t_{af}^4 t_{fs}^2 t_{sa}^2 \frac{(\sin^2 x + \text{sh}^2 y)}{\rho} \cdot \exp[-(\delta_2 + 2\delta_1)\ell],$$

где

$$\rho^2 = a^2 + b^2, \quad a = 2\Gamma^2 + \frac{\Delta^2}{4} - \frac{(\delta_2 - 2\delta_1)^2}{4},$$

¹⁹Rena J. Kasumova. Optical parametric interaction in infrared region crystals. J. of Non-linear Optical Physics & Materials, 2013, v. 22, No 3, p. 1350033-1-1350033-9

$$b = \frac{\Delta(\delta_2 - 2\delta_1)}{2}, \quad \Gamma^2 = \gamma_1 \gamma_2 I_{10},$$

$$I_j = A_j A_j^*, \quad x = \rho^{\frac{1}{2}} \ell \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$y = \rho^{1/2} \ell \sin(\varphi/2), \quad \varphi = \text{atan}(b/a).$$

Здесь

$$\gamma_1 = \frac{8\pi^2 \chi_{eff}^{(2)}}{\lambda_1 n(\omega_1)}, \quad \gamma_2 = \frac{4\pi^2 \chi_{eff}^{(2)}}{\lambda_2 n(\omega_2)}$$

δ_j ($j = 1, 2$) коэффициенты поглощения, $\chi_{eff}^{(2)}$ эффективное значение квадратичной восприимчивости для пленки ZnO, $\lambda_{1,2}$ – длины волн накачки и гармоники, $n(\omega_{1,2})$ – показатели преломления в ZnO на частотах ω и 2ω , соответственно, и t_{af} , t_{fs} , t_{sa} френелевские коэффициенты пропускания на фундаментальной частоте на границе воздух-пленка и на границе пленка-подложка и подложка-воздух на частоте гармоники, соответственно. $\Delta = k_2 - 2k_1$ – фазовая расстройка при ГВГ.

Получить выражение для оптимальной длины взаимодействия при $\delta_2 = 2\delta_1$.²⁰

113. Исследования показывают, что на эффективность преобразования в ZnO структуре существенное влияние оказывают примеси, присутствующие в соединении. Рассмотрим утроение частоты в ZnO пленке, обладающей кубичной нелинейностью. Анализ процесса в ПЗИ позволяет получить следующее выражение для интенсивности третьей гармоники

²⁰Rena J. Kasumova, V.J. Mamedova, G.A. Safarova, N.V. Kerimli. On increasing the conversion efficiency to second-harmonic for undoped and doped ZnO nanocomposites. *International Journal of Innovative Technology and Exploring Engineering (IJITEE)*, 2016, v. 6, Issue 5, October, p. 27-32.

$$I_{3\omega}^f(z) = (t_{af}^\omega)^6 \cdot (t_{fs}^{3\omega})^2 \cdot (t_{sa}^{3\omega})^2 \cdot \gamma_3 \times \\ \times I_{10}^2 \cdot (\gamma_1 \rho_3)^{-1} \cdot e^{-(\delta_3 + 3\delta_1)z} \cdot (\sin^2 \alpha_3 + \sinh^2 \beta_3), \quad (1)$$

где

$$\rho_3^2 = a_3^2 + b_3^2; \quad I^2 = \gamma_1 \gamma_3 I_{10}^2, \\ a_3 = 3\Gamma_3^2 + \frac{[\Delta_f^2 - (\delta_3 - 3\delta_1)^2]}{4}, \quad b_3 = \frac{\Delta_f(\delta_3 - 3\delta_1)}{2}; \\ \alpha_3 = \sqrt{\rho_3} z \cos \varphi / 2; \quad \beta_3 = \sqrt{\rho_3} z \sin \varphi / 2; \quad \varphi = \operatorname{atan} \frac{b_3}{a_3}. \\ \gamma_1 = \frac{3\pi^2}{n_1 \lambda_\omega} \chi_{eff}^{(3)}, \quad \gamma_3 = \frac{3\pi^2}{n_3 \lambda_\omega} \chi_{eff}^{(3)}$$

– нелинейные коэффициенты третьего порядка на частотах $\omega_{1,3}$ ($\omega_1 = \omega$ и $\omega_3 = 3\omega$), δ_j ($j=1, 3$) обозначают коэффициенты поглощения, $\chi_{eff}^{(3)}$ – эффективная кубичная восприимчивость третьего порядка как для чистого, так и для примесного ZnO, λ_ω обозначает длину волны накачки, $n_{\omega,3\omega}$ – показатели преломления в пленке на частотах ω и 3ω , соответственно, а t_{af}, t_{fs}, t_{sa} френелевские коэффициенты пропускания для основного излучения на границе воздух-пленка и френелевские коэффициенты пропускания на границе пленка-подложка и подложка-воздух для гармоники, соответственно. $\Delta_f = k_3 - 3k_1$ – фазовая расстройка между взаимодействующими волнами в пленке.

Получить выражение для когерентной длины кристалла при фазовом синхронизме.²¹

²¹Rena J. Kasumova, V.C. Mamedova, N.V. Kerimova. Influence of doping materials on third harmonic generation in zinc oxide nanocomposites. *J. of Nonlinear Optical Physics & Materials*, 2017, **26** (2) p. 1750019-1-11.

114. Рассчитать угол фазового синхронизма в отрицательном двухосном LiGaS_2 кристалле при параметрической генерации холостой волны на длине волны 5.457 мкм при 90° синхронизме (еое взаимодействие в плоскости XY). Волна накачки на $\lambda_p = 1.0642$ мкм, сигнальная волна на $\lambda_s = 1.3220$ мкм. В плоскости XY этот кристалл является отрицательным одноосным кристаллом. Кристалл был вырезан для 90° синхронизма с $\varphi = 40.6^\circ$.²² Здесь даны для сравнения случай одноосного и двухосного кристаллов рис. 26 и 27.

Необходимые данные по кристаллу приведены в таблице 5.

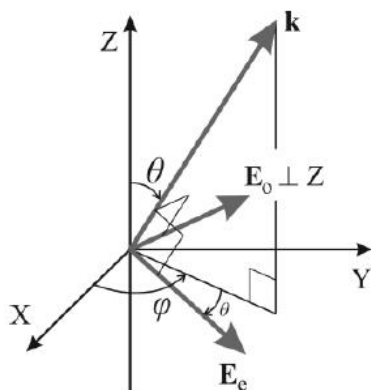


Рис. 26. В одноосном кристалле θ – угол между направлением светового вектора \vec{k} и оптической осью кристалла (ось z), φ – угол между осью X и проекцией вектора \vec{k} на плоскость XY .

²² Rena J, Kasumova. G.A. Safarova, N.V. Kerimova. Ternary wide-bandgap chalcogenides LiGaS_2 and BaGaS_7 for the mid-IR. International J. of Engineering and Computer Science, 2014, 3(8), 7823-7828.

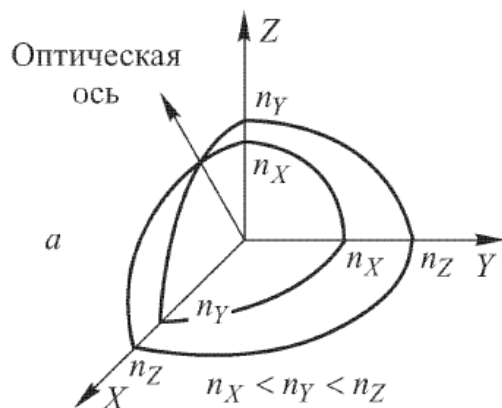


Рис. 27. Кристаллооптическая система координат для показателей преломления в двухосном кристалле в случае $n_x < n_y < n_z$.

Таблица 5

Кристалл	λ , мкм	n_o	n_e	Тип синхронизма, плоскость	θ, ϕ , угл. град.
LiGaS ₂	1.0642 (pump)	2.134473	2.124105 2.122864	eoe, XY	$\theta=90^\circ$ $\varphi = 40.6^\circ$
	1.32201 (signal)				
	5.457 (idler)		2.076045 2.074852		

115. Рассмотрим параметрическую генерацию в двуосном кристалле LiInSe_2 , вырезанном в ху плоскости под углом $\varphi=41.6^\circ$ для генерации излучения на $\lambda=6.5$ мкм. Реализуется еое скалярное взаимодействие, характеризуемое максимальной нелинейной эффективностью $d_{eff}=10.6$ пм/В. В качестве источника накачки был рассмотрен Nd : YAG лазер с диодной накачкой ($\lambda=1.064$ мкм), генерирующий импульсы длительностью 14 нс с энергией 100 мДж, средней мощностью 10 Вт и диаметром пучка накачки, равным 3.8 мм. При данной длине волны накачки и параметрической генерации излучения холостой волны на $\lambda_i=6.5$ мкм определить длину волны для сигнальной волны и, используя уравнения Сельмейера для данного кристалла, рассчитать показатели преломления n_x , n_y , n_z на соответствующих длинах волн, а также угол синхронизма φ_s .²³

116. Рассмотрим процесс удвоения частоты ω_1 лазерного излучения в нецентросимметричной ZnO структуре нанокompозита при скалярном синхронизме. Поскольку ГВГ происходит только в нецентросимметричных средах, то не рассматривается нелинейное взаимодействие в стеклянной подложке. Для ГВГ в ZnO структуре можно получить

$$A_2(l) = -i\gamma_2 \cdot t_{fs}^{2\omega} \cdot t_{sa}^{2\omega} \cdot (t_{af}^\omega)^2 A_{10}^2 \cdot l \cdot \text{sinc}\lambda l \cdot \exp[2i\phi_{10} - (\delta_2 + 2\delta_1 - i\Delta k)l/2],$$

где $\lambda^2 = 2\Gamma^2 - (\delta_2 - 2\delta_1 + i\Delta k)^2/4$, $\Gamma^2 = \gamma_1\gamma_2 I_{10}(t_{af}^\omega)^2$, $\gamma_{1,2}$, $\delta_{1,2}$ – нелинейные коэффициенты и коэффициенты поглощения на частотах $\omega_{1,2}$, соответственно, $t_{fs}^{2\omega}$, $t_{sa}^{2\omega}$ – это френелевские коэффициенты на границах пленка-подложка (f – s) и под-

²³Rena J. Kasumova. Parametric down-conversion in LiInSe_2 : double-pump pass singly-resonant oscillator. *International J. of Computer Engineering & Technology*, 2014 5(9), 105-114.

ложка-воздух ($s - a$) на частоте второй гармоники. Из полученного выражения можно определить оптимальное значение для толщины нелинейной среды, при котором интенсивность ВГ максимальна.²⁴

117. Рассмотрим процесс утроения частоты в ZnO/PMMA пленке. В рассматриваемом случае, когда нелинейный материал представляет собой кристаллические частицы ZnO внутри полимерной пленки PMMA, используется понятие эквивалентной толщины нелинейной среды $d_{ZnO}^{equivalent}$ внутри PMMA, означающее толщину, которую могли бы иметь нанокристаллы ZnO без содержания PMMA

$$d_{ZnO}^{equivalent} = \frac{\%wt_{ZnO}}{100 - \%wt_{ZnO}} \frac{\rho_{PMMA}}{\rho_{ZnO}} l_1.$$

Здесь ρ_{PMMA} и ρ_{ZnO} – плотности PMMA и ZnO соответственно, $\%wt_{ZnO}$ – весовая концентрация нанокристаллов ZnO внутри полимерной матрицы. Вместо обычной геометрической толщины нелинейной среды l_1 для ZnO/PMMA пленки при расчетах используется эквивалентная толщина $d_{ZnO}^{equivalent}$. А с учетом угла падения θ лазерного луча на ZnO/PMMA пленку получаем $l_{eff} = d_{ZnO}^{equivalent} / \cos \theta$. Определить эффективную толщину l_{eff} при условии $\%wt_{ZnO} = 16\%$ и 7% при $\rho_{PMMA}/\rho_{ZnO} = 0.091$.²⁵

118. Определить угол между оптической осью отрицательного двухосного кристалла BaGa₄S₇ и Z осью (рис. 28) в слу-

²⁴Rena J. Kasumova, G.A. Safarova, V.C. Mamedova. Phase effects at Second Harmonic Generation in zinc oxide, grown on glass substrate. *International Journal of Innovative Technology and Exploring Engineering (IJITEE)*, 2016, 5(9), 7-13.

²⁵Rena J. Kasumova, Sh.A.Shamilova. Phase Effects at Third Harmonic Generation in ZnO/PMMA nanocomposite films. *International Journal of Engineering and Technology IJET-IJENS*, 2015, 15(4), 10-21.

чае $n_x < n_y < n_z$ в отрицательном двухосном BaGa_4S_7 кристалле при параметрической генерации сигнальной волны (обыкновенная волна) на длине волны $\lambda_s = 1.28399$ мкм (ооо взаимодействие в плоскости XZ. Волна накачки (необыкновенная волна) на $\lambda_p = 1.0642$ мкм, холостая волна (обыкновенная волна) на $\lambda_i = 6.217$ мкм. Кристалл был вырезан с $\theta = 12^\circ$.

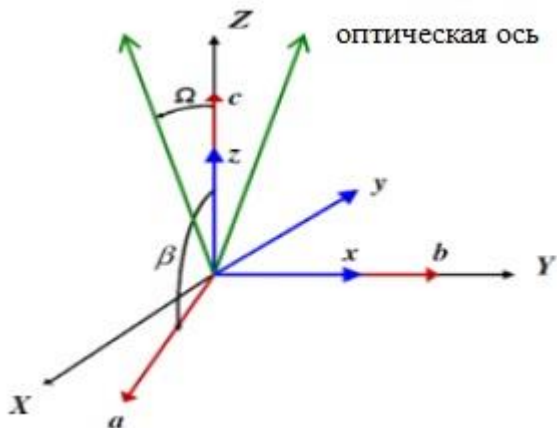


Рис. 28. Для BaGa_4S_7 кристалла: X, Y, Z – кристаллофизические оси, a, b, c – кристаллографические оси, x, y, z – диэлектрические оси. Две оптические оси (зеленые линии) расположены в xz плоскости.

Необходимые данные по кристаллу приведены в таблице 6.²⁶

119. Рассчитать λ_s для сигнальной волны в положительном одноосном $\text{GaS}_{0.4}\text{Se}_{0.6}$ кристалле при трехволновом параметрическом взаимодействии в случае излучения накачки на длине волны $\lambda_p = 1.0642$ мкм и холостой волне $\lambda_i = 6.45$ мкм.

²⁶Rena J, Kasumova. G.A. Safarova, N.V. Kerimova. Ternary wide-bandgap chalcogenides LiGaS_2 and BaGaS_7 for the mid-IR. International J. of Engineering and Computer Science, 2014, 3(8), 7823-7828.

Оценить угловой дисперсионный коэффициент первого порядка $\Delta\theta$ (синхронизм второго типа, взаимодействие ео-е). Необходимые данные приведены в таблице 7²⁷

Таблица 6

Кристалл	λ , мкм	n_o	n_e	Тип синхронизма, плоскость	θ , угл. градус
BaGa ₄ S ₇	1.0642 (pump)		2,319966	оое, XZ	
	1.28399 (signal)	2.289489			
	6.217 (idler)	2.242884			

Таблица 7

Кристалл	λ , мкм	n_o	n_e	Тип синхронизма
GaS _{0.4} Se _{0.6}	1.0642 (pump)	2.678731	2.365492	еое
	1.274479 (signal)	2.661997	2.349479	
	6.45 (idler)	2.610797	2.301594	

120. При параметрической генерации нелинейный кристалл размещен внутри оптического резонатора. Рассмотрим параметрическую генерацию сигнальной волны в Hg_{1-x}Cd_xGa₂S₄ кристалле при длине волны основного излучения Nd:YAG лазера ($\lambda_p = 1.064$ мкм) и длине холостой волны $\lambda_i = 1.064$ мкм. Полагаем, что скалярное взаимодействие происходит по схеме еоо. Рассчитать в ПЗИ угловой дисперсионный

²⁷Rena J. Kasumova, Sh.A. Shamilova. Optical parametric amplification at 6.45 mcm for Ga_xSe_{1-x}. International J. Of Scientific & Technology Research, 2014, 3(6), 189-192.

коэффициент второго порядка для случая 90° синхронизма и для $x = 0.3$. Из какого соотношения определяется λ_s для сигнальной волны? Необходимые данные приведены в таблице 8.²⁸

Таблица 8

Кристалл	λ мкм	n_0^ω	n_e^ω	Тип синхронизма	d_{eff} , пм/В
Hg _{0.7} Cd _{0.3} Ga ₂ S ₄	1.064 (pump)	2.430288	2.39899	еоо	24.94
Hg _{0.7} Cd _{0.3} Ga ₂ S ₄	(signal)	2.405065	2.367763	еоо	
Hg _{0.7} Cd _{0.3} Ga ₂ S ₄	3.27 (idler)	2.386262	2.35255	еоо	

²⁸Rena J. Kasumova, Sh.A.Shamilova, G.A. Safarova, L.S. Gadyieva. Optical parametric oscillation in Hg_{1-x}Cd_xGa₂S₄. International J. of Engineering and Sciences, IJET-IJENS', 2015, **15**(2), 16-22.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЧАСТОТЫ В ОПТИЧЕСКОМ РЕЗОНАТОРЕ

Различают два вида преобразования в оптическом резонаторе: преобразование во внешнем резонаторе и преобразование внутри лазерного резонатора. В ряде практических применений при частотном преобразовании используется внешний резонатор, схема которого приведена на рис. 29. Размещение нелинейной среды внутри такого резонатора позволяет увеличить эффективность частотного преобразования. При этом за счёт дополнительных многократных проходов нелинейной среды эффективная длина нелинейного взаимодействия волн увеличивается, а энергообмен между волнами определяется, главным образом, фазовыми соотношениями.

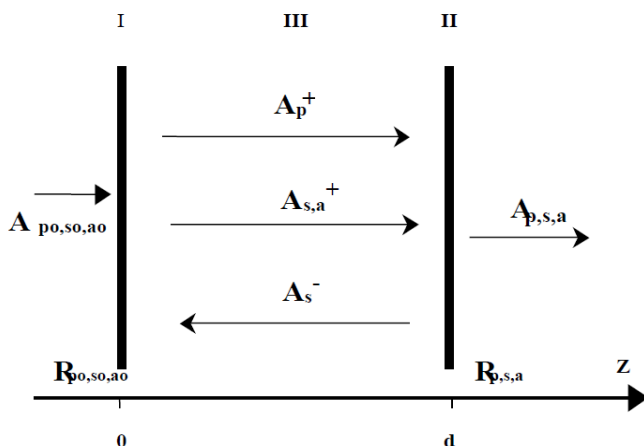


Рис. 29. Оптическая схема с внешним резонатором для случая преобразования компонент комбинационного рассеяния: I, II – зеркала резонатора, III – нелинейная среда толщины d , $R_{po, so, ao}$, $R_{p,s,a}$ – коэффициенты отражения соответствующих компонент от левого и правого зеркал.

В параметрическом генераторе можно использовать оптический резонатор, который может быть как однорезонаторным, так и двухрезонаторным. В однорезонаторном параметрическом генераторе зеркала резонатора имеют высокий коэффициент отражения на одной из генерируемых слабых волн, например, сигнальной (или холостой) волне и прозрачны для волны холостой (или сигнальной) волны. В двухрезонаторном варианте зеркала резонатора способны отражать как сигнальную, так и холостую волны. Двухрезонаторный вариант преобразования имеет более низкий порог генерации, чем однорезонаторный, откуда следует, что там легче осуществить параметрическую генерацию. Однако, как показали экспериментальные исследования, для двухрезонаторного варианта свойственна нестабильность режима генерации, выражающаяся в перескоках частоты выходного излучения. Поэтому на практике чаще применяется однорезонаторный вариант параметрической генерации, где частота выходного излучения стабильна.

Как известно, для непрерывных лазеров в стационарном режиме, благодаря малому коэффициенту пропускания выходного зеркала, свойственна малая выходная мощность излучения по сравнению с мощностью внутри лазерного резонатора. Для задач приложений важно найти пути повышения эффективности преобразования для случая стационарного или квазистационарного режима генерации. С этой целью очень перспективно размещение нелинейной среды внутри лазерного резонатора, когда в пределах одно и того же резонатора происходит генерация излучения на основной частоте и нелинейное преобразование ее, например, в гармонику. В этом случае при малой доле выходного излучения эффективность преобразования, которая пропорциональна мощности основного излучения, будет значительно больше внутри лазерного резонатора, чем вне его. Кроме того, фазовые изменения взаимодей-

ствующих волн в пределах одного и того же резонатора будут сильно влиять на эффективность преобразования.

Преобразование во внешнем резонаторе

121. Рассмотрим параметрическое взаимодействие компонент комбинационного рассеяния во внешнем резонаторе. В стационарном режиме во внешнем резонаторе могут быть установлены стоячие волны. Оптическая схема резонатора типа резонатора Фабри – Перо представлена на рис. 29. Параметрическое взаимодействие волн происходит во внешнем резонаторе, заполненном нелинейной средой длины d , где $A_{p,s,a}^{\pm}$ – комплексные амплитуды волн накачки, стоксовой и антистоксовой компонент на частотах $\omega_{p,s,a}$ соответственно, причём $2\omega_p = \omega_s + \omega_a$, волна, бегущая слева направо, вдоль оси Z – отмечена знаком плюс, в обратном направлении – знаком минус, δ, γ – коэффициенты поглощения и нелинейной связи волн и, наконец, фазовая расстройка $\Delta = 2k_p - k_s - k_a$.

Полагаем имеет место однорезонаторный вариант параметрической генерации света, когда резонатор прозрачен для двух волн, например, антистоксовой компоненты и волны накачки, а обратная связь имеется только для стоксовой компоненты. Положим, что волна накачки падает нормально на левое зеркало резонатора. При прохождении через нелинейную среду волна в результате параметрического взаимодействия возбуждается стокс и антистоксовую компоненты комбинационного рассеяния.

Написать граничные условия для однорезонаторного варианта параметрического генератора.²⁹

²⁹R.J. Kasumova, G.A. Safarova, V.J. Damirova. Optical parametric oscillation in the external resonator. *Proceedings of SPIE "Fundamental Problems of Optoelectronics and Microelectronics V," Khabarovsk, Russia, September 13-16, 2004, v.5851, p. 66-73*

122. Рассмотрим генерацию третьей гармоники во внешнем резонаторе. Предположим, что плоская волна с частотой ω_1 падает нормально на левое зеркало резонатора, заполненного нелинейной средой длины d с кубичной поляризуемостью. При распространении в нелинейной среде эта волна возбуждает волну третьей гармоники с частотой $\omega_3 = 3\omega_1$ (см. рис. 30, где A_1^\pm, A_3^\pm комплексные амплитуды волн основной частоты и гармоники, бегущих по направлению (знак плюс) и в противоположном направлении (знак минус) оси z , $\gamma_{1,3}$ – коэффициенты нелинейной связи волн, $\Delta = k_3 - 3k_1$ – фазовая расстройка, R_{30}, R_3 – комплексные коэффициенты отражения волны третьей гармоники соответственно от левого и правого зеркал при падении волны из нелинейного кристалла. В рассматриваемом случае волна основной частоты свободно проходит через резонатор ($R_{10} = R_1 = 0$), а волна третьей гармоники испытывает многократные отражения ($R_{30}, R_3 \neq 0$). В результате в стационарном режиме в резонаторном промежутке устанавливаются стоячие волны основной частоты и третьей гармоники.

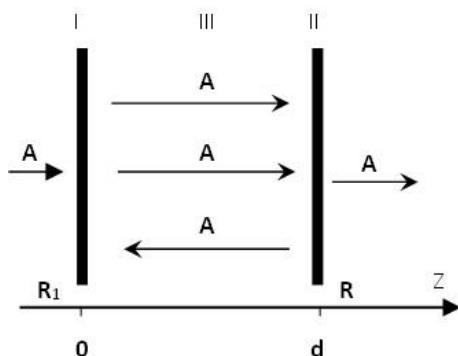


Рис. 30. Схема резонаторного устройства: I, II – зеркала резонатора, III – нелинейный слой толщины d . $R_{10,30}, R_{1,3}$ – коэффициенты отражения левого и правого (выходного) зеркал соответственно.

Написать граничные условия для данного варианта параметрического генератора.³⁰

Преобразование частоты внутри лазерного резонатора

123. Рассмотрим оптическую схему генерации четвертой гармоники каскадным путем, представленную на рис. 31 для случая ооо взаимодействия. Волна накачки на частоте ω_1 , проходя в положительном направлении горизонтальной оси (оси z) через первый кристалл с квадратичной нелинейностью длины l_1 , возбуждает волну второй гармоники на частоте $2\omega_1$. После отражения от зеркала $З_2$ обе волны, распространяясь в отрицательном направлении оси z , вновь проходят через этот же кристалл, взаимодействуя в нём. После выхода из первого кристалла волна гармоники, используемая для накачки второго нелинейного кристалла, отражаясь от призмы Глана, попадает во второй кристалл с квадратичной нелинейностью длины l_2 , где происходит генерация четвёртой гармоники на частоте $4\omega_1$. Предполагается, что зеркало $З_3$ нанесено на торец второго кристалла и имеет высокое пропускание на частоте второй гармоники и высокое отражение на частоте четвёртой гармоники. Выходное зеркало $З_4$, наоборот, имеет высокое пропускание на частоте четвёртой гармоники и высокое отражение на частоте второй гармоники.

Какова роль призмы Глана?³¹

124. Рассмотрим систему, состоящую из двух нелинейных кристаллов – удвоителей длин l_1 (2), l_2 (3) и одного кристалла длины l_3 (4), в котором осуществляется генерация суммарной

³⁰З.А.Тагиев, Р.Дж. Касумова, Ш.Ш.Амиров. Генерация третьей гармоники во внешнем резонаторе. *Оптика и спектр*.1992 г, т.73, №3, с.583-587.

³¹Rena J. Kasumova. Cascade fourth harmonic generation in a laser cavity. *J. Opt. B: Quantum Semiclas. Opt.* 2001, 2, 334-337.

частоты (основной частоты излучения и её четвёртой гармоники) (см. рис. 32).

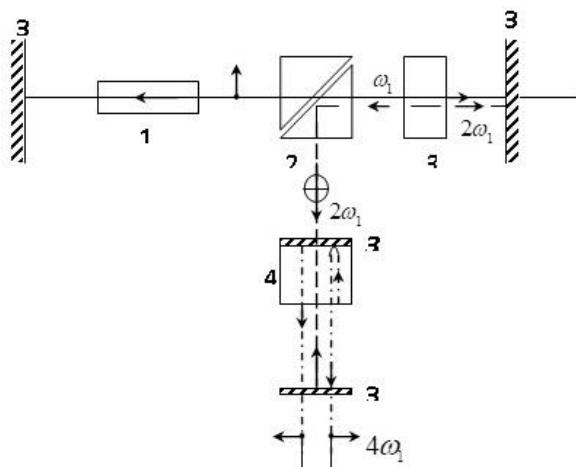


Рис. 31. Принципиальная схема внутрирезонаторной генерации четвёртой гармоники: 1 – активная среда лазера, 3₁, 3₂, 3₃ и 3₄ – зеркала, 2 – призма Глана, 3, 4 – первый и второй нелинейные кристаллы.

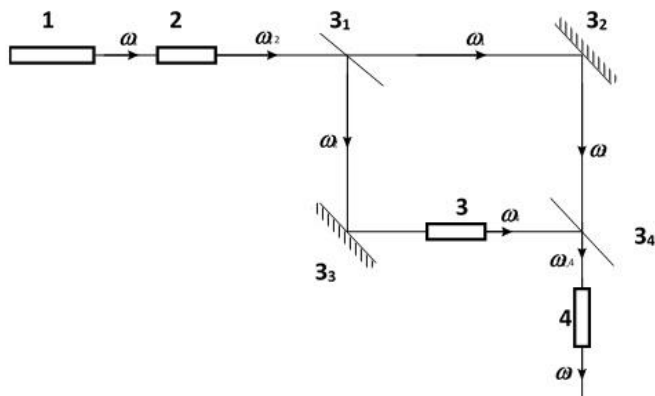


Рис. 32. Схема генерации пятой гармоники. 1 – лазер, 2 – первый кристалл-удвоитель длины l_1 , 3 – второй кристалл-удвоитель длины l_2 , 4 – преобразователь суммарной частоты длины l_3 ; 3₁, 3₂, 3₃ и 3₄ – зеркала.

При следующих соотношениях между потерями волн $\delta \equiv 2\delta_1 = \delta_2 = 2\delta_3 = \delta_4$; $\delta_5 = \delta_6 + \delta_7$ в ПЗИ для эффективности преобразования в пятую гармонику получаем:

$$\eta_5 = (I_{10}^2 \gamma_2^2 \gamma_4 \gamma_5)^2 \lambda_1'^{-4} \lambda_2'^{-2} \lambda_3'^{-2} \cdot \sin^4 \lambda_1' l_1 \cdot \sin^2 \lambda_2' l_2 \cdot \sin^2 \lambda_3' l_3 \times \\ \times \sqrt{\cos^2 \lambda_1' l_1 + \left(\frac{\Delta_1}{2\lambda_1'}\right)^2} \sin^2 \lambda_1' l_1 \cdot \exp[-\delta(5l_1 + 2l_2) - 2\delta_5 l_3],$$

где

$$\lambda_1'^2 = 2\Gamma_1^2 + \frac{\Delta_1^2}{4}, \quad \lambda_2''^2 = 2\Gamma_2'^2 + \frac{\Delta_2^2}{4}, \quad \lambda_3''^2 = \Gamma_3'^2 + \frac{\Delta_3^2}{4}, \\ \Gamma_2'^2 = \gamma_3 \gamma_4 I_{10}^2 \sin^2 \lambda_1' l_1 \lambda_1'^{-2} \exp(-2\delta l_1), \\ \Gamma_3'^2 = \gamma_5 (\gamma_7 I_4' + \gamma_6 I_1'), \\ I_4' = \gamma_4^2 \gamma_2^4 \lambda_1'^{-4} \lambda_2'^{-2} I_{10}^4 \sin^4 \lambda_1' l_1 \sin^2 \lambda_2' l_2 \exp[-2\delta(2l_1 + l_2)], \\ I_1' = I_{10} \sqrt{\cos^2 \lambda_1' l_1 + \left(\frac{\Delta_1}{2\lambda_1'}\right)^2} \sin^2 \lambda_1' l_1 \exp(-\delta l_1).$$

где $\delta_{3,4}$ – коэффициенты поглощения во втором кристалле; $\gamma_{3,4}$ – коэффициенты нелинейной связи волн во втором кристалле-удвоителе, $\Delta k_2 = k_4 - 2k_2$, $\delta_5, \delta_6, \delta_7$ – коэффициенты поглощения в третьем кристалле на частотах $\omega_1, \omega_4 = 4\omega_1$ и $\omega_5 = \omega_1 + \omega_4$, соответственно; $\gamma_{5,6,7}$ – коэффициенты нелинейной связи взаимодействующих волн в третьем кристалле, $\Delta k_3 = k_5 - k_1 - k_4$. Найти оптимальное значение длины l_3^{opt} кристалла, при котором на выходе кристалла (4) получим максимальное значение эффективности преобразования.³²

125. Почему эффективность частотного преобразования

³²Rena J. Kasumova. Phase effects at the fifth-harmonic generation. *Applied Optics*, 2002, **41**(21) 4385-4389.

выше при внутрирезонаторном преобразовании, нежели при размещении нелинейной среды вне резонатора (рис. 33)?

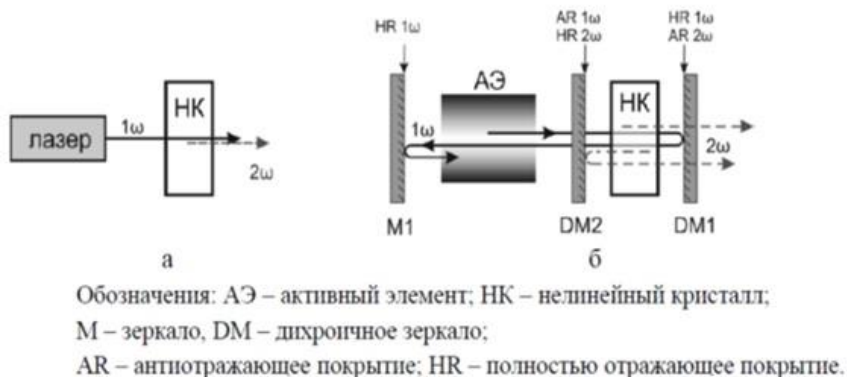
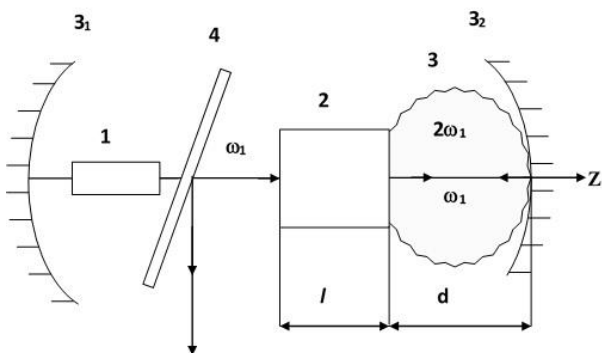
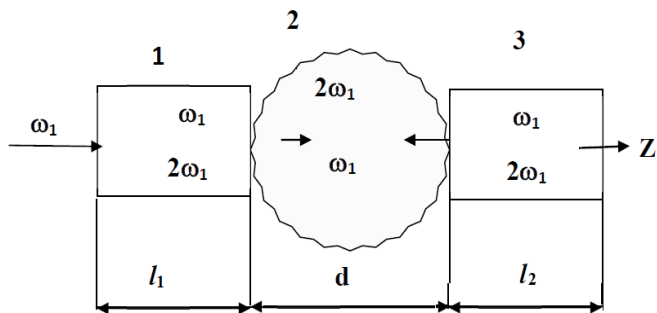


Рис. 33. Схемы ГВГ для внerezонаторного случая (а) и внутрирезонаторного случая (б).

126. Рассмотрим дисперсионный интерферометр, состоящий из двух последовательно расположенных нелинейных кристаллов, между которыми помещается исследуемый объект (рис. 34). Лазерное излучение с частотой ω_1 частично преобразуется во вторую гармонику в первом кристалле и, таким образом, исследуемый объект просвечивается двумя волнами с частотами ω_1 и $\omega_2 = 2\omega_1$. При прохождении во втором кристалле основное излучение вновь преобразуется во вторую гармонику, но с начальными условиями отличными от таковых в первом кристалле, так как здесь сказывается присутствие исследуемой среды.

Таким образом, в отличие от традиционных интерферометров в дисперсионном интерферометре волны проходят один и тот же геометрический путь.

Теперь представим внутрирезонаторную схему дисперсионного интерферометра. В стационарном режиме в резонаторном промежутке устанавливаются стоячие волны основной и



В этом случае интенсивность второй гармоники зависит от обобщённой разности фаз и осциллирует с изменением ψ . Внесение в резонатор лазера исследуемой среды ведёт к дополнительной разности фаз $2\varphi_1(2d) - \varphi_2(2d)$, а это приводит к сдвигу интерференционной зависимости $I_{2\text{ВЫХ}}(\psi)$ по оси абсцисс на соответствующую величину. В результате в ПЗИ для интенсивности второй гармоники на выходе интерферометра получается

$$I_{2,\text{ВЫХ}} \sim I_2(l_1) \exp[-(\delta'_2 + 2\delta'_1)l_2] \times \\ \times \left| \sin \lambda_2 l_2 C \cdot \exp(i\psi) + \frac{2\delta'_1 - \delta'_2 + i\Delta k_2}{2\lambda_2} \right|^2,$$

где $\psi = \Delta k_1 l_1 + 2\varphi_1(d) - \varphi_2(d)$ – обобщённая разность фаз волн основного излучения и гармоники, $\varphi_{1,2}(d)$ – набеги фаз волн в исследуемой среде на частотах ω и 2ω соответственно, $\Delta k_1 l_1$ – набег фаз волн в первом нелинейном кристалле, $\delta'_{1,2}$ – коэффициенты поглощения во втором кристалле. Видно, что интенсивность второй гармоники – функция обобщённой разности фаз ψ и как следствие зависит от параметров исследуемой среды. Как из приведенной зависимости интенсивности ВГ определяется дисперсия показателя преломления исследуемой среды?³³

³³Z.A. Tagiev, R.Dzh. Kasumova, R.A. Salmanova, N.V. Kerimova. *The theory of nonlinear dispersion interferometers in the constant intensity approximation. Optics and Spectroscopy*, 2001, **91**(6), 909-913;

R.J. Kasumova. *Analysis of the dispersion interferometer function in constant intensity approximation. SPIE Proceedings of Asia-Pacific Conference on Fundamental problems of Opto- and Microelectronics, Vladivostok, Russia, Sept.-Oct., Proc. of SPIE*, 2002, **5129**, 261-269.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ СХЕМЫ КОМПЕНСАЦИИ

При преобразовании частоты в условиях фазовой расстройки нельзя осуществить полной перекачки энергии основного излучения в энергию ВГ. В этом случае наблюдаются пространственные биения амплитуды гармоники. С ростом расстройки увеличивается пространственная частота, но при этом уменьшается максимальное значение интенсивности ВГ. Для повышения эффективности преобразования в условиях фазовой расстройки желательно увеличить длину нелинейной среды. Однако увеличение длины может сопровождаться дополнительными явлениями, действующими в сторону уменьшения эффективности преобразования, например, обратная перекачка энергии от волны гармоники в волну основного излучения. С целью избавления от подобного следует не просто увеличивать длину среды, а применять специальные схемы компенсации. Одной из перспективных схем компенсации является геометрия последовательно расположенных кристаллов.

Перечислим возможные ситуации применения последовательно расположенных нелинейных слоев – кристаллов. Это когда технологически трудно вырастить однородные нелинейные кристаллы большой длины; когда в кристалле нельзя выполнить условие фазового синхронизма для рассматриваемого взаимодействия волн и, наконец, при преобразовании ультракоротких импульсов в условиях группового синхронизма, поскольку его можно выполнить только при наличии фазовой расстройки. При такой геометрии возможны варианты. Например, подавление процесса обратной перекачки энергии от второй гармоники в волну накачки может быть достигнуто, во-первых, в регулярных доменных структурах с инвертированными слоями – доменами. Во-вторых, подавления можно добиться при изменении знака линейной фазовой расстройки между взаимодействующими волнами при переходе от слоя к слою 2.

127. Проанализируем процесс преобразования частоты в двух последовательно расположенных нелинейных кристаллах в ПЗИ. Для эффективности преобразования во вторую гармонику после прохождения двух кристаллов длины l_1 и l_2 имеем

$$\eta_2(l_2) = \eta_2(l_1) \times \left[\left(\cos \lambda_2 l_2 + c_1 \frac{\sin \lambda_2 l_2}{\lambda_2} \right)^2 + \left(b \frac{\sin \lambda_2 l_2}{\lambda_2} \right)^2 \right] \exp(-2\delta'_2 l_2),$$

где

$$c_1 = \lambda_1 \frac{\gamma'_2}{\gamma_2} \operatorname{ctg} \lambda_1 l_1 \cos \psi + \frac{\Delta k_1 \gamma'_2}{2 \gamma_2} \sin \psi,$$

$$b = \frac{\Delta k_1 \gamma'_2}{2 \gamma_2} \cos \psi - \lambda_1 \frac{\gamma'_2}{\gamma_2} \operatorname{ctg} \lambda_1 l_1 \sin \psi - \frac{\Delta k_2}{2},$$

$$\Gamma_1^2 = \gamma_1 \gamma_2 I_{10}, \Gamma_2^2 = \gamma_1' \gamma_2' I_1(l_1), \lambda_{1,2}^2 = 2\Gamma_{1,2}^2 + \frac{\Delta k_{1,2}^2}{4},$$

$\Delta k_1 = k_2 - 2k_1$ – фазовая расстройка в первом слое при ГВГ, Δk_2 – во втором слое при ГВГ, а $\psi = 2\varphi_1(l_1) - \varphi_2(l_1) - \Delta k_1 l_1$ определяет набег фазы волн основного излучения и гармоники в нелинейном кристалле. Видно, что амплитуда ВГ существенным образом зависит от фазового набег волн ψ . Изменение ψ на π эквивалентно изменению знака коэффициента нелинейной связи волн $\gamma'_{1,2}$ во втором кристалле. И поэтому, в зависимости от знаков волновой расстройки Δ_2 и коэффициентов нелинейной связи волн во втором слое, можно различить четыре типа взаимодействия. Из выражения для η_2 определить оптимальное значение фазовой расстройки Δ_2 , при котором эффективность преобразования максимальна.³⁴

³⁴Z.H. Tagiev, R.J. Kasumova, G.A. Safarova, A. Karimi. Frequency conversion to the second harmonic in different layer nonlinear media. *Applied Optics*, 2008, v.47, p.3681-3688.

Регулярные доменные структуры

Как известно, одним из основных факторов, ограничивающих эффективность преобразования энергии на частоте накачки, является нарушение оптимального фазового соотношения между взаимодействующими нелинейными волнами. Нарастание интенсивности возбуждаемой волны продолжается до так называемой когерентной длины, определяемой фазовой расстройкой в нелинейной среде. Более того в дальнейшем с увеличением длины нелинейной среды интенсивность преобразованного излучения начинает уменьшаться. Другими словами, происходит обратная перекачка энергии возбуждаемой волны в энергию возбуждающей. Вследствие чего не удастся достичь полной перекачки энергии волны накачки в энергию волны на требуемой частоте. Эффективный энергообмен между взаимодействующими волнами можно осуществить в режиме квазисинхронного взаимодействия. С этой целью для фазовой коррекции используются периодические неоднородные среды, так называемые слоистые среды. Причем соседние слои (домены) отличаются знаком тензора восприимчивости, т.е. оптическая ось каждого последующего слоя перевернута по отношению к оси предыдущего слоя. Подобная оптическая схема фазовой коррекции реализуется в нелинейных средах с регулярной доменной структурой (РДС-Quasi-Phase-Matched structure, QPM), состоящей из последовательно расположенных сегнетоэлектрических доменов. В качестве таких сред успешно используются кристаллы сегнетоэлектриков, нелинейные оптические свойства которых задаются в процессе роста кристаллов.

В рассматриваемых периодических структурах для увеличения интенсивности гармоники помимо существования инвертированных слоев-доменов необходимо выполнение еще одного условия. Толщина каждого слоя должна равняться когерентной длине, на которой сдвиг фаз между волной поляри-

зации и гармонике составляет π . В результате в такой структуре при переходе от одного слоя к другому на когерентной длине возникает фазовый сдвиг. Данный сдвиг компенсируется скачкообразным изменением на границе слоев направления поляризации и знака нелинейной восприимчивости на противоположный. Таким образом, компенсация фазового сдвига на границе происходит за счет периодической модуляции нелинейной восприимчивости, что эквивалентно изменению разности фаз на π .

В последнее время практический интерес к средам с регулярной доменной структурой сопровождается технологической разработкой подобных многослойных сред. Это вызвано возможностью преобразования частоты в изотропных материалах, использованием эффективных компонент нелинейного тензора. Например, в кристалле LiNbO_3 используют ее-е взаимодействие, связанное с нелинейным коэффициентом d_{33} , превышающим на порядок остальные нелинейные коэффициенты этого кристалла. Такое взаимодействие приводит к гораздо более высокому коэффициенту нелинейного преобразования частоты по сравнению с преобразованием в однородной среде. С другой стороны при данной схеме взаимодействия возможно реализовать оптические параметрические процессы при обратной геометрии распространения, что было невозможно при традиционном синхронном взаимодействии. Кроме того, эти структуры привлекательны способностью одновременно генерировать несколько оптических гармоник в одном периодически поляризованном кристалле. Подобное было неосуществимо в случае однородной нелинейной среды. При квазисинхронном взаимодействии экспериментально получено интенсивное когерентное излучение в диапазоне частот от ИК до УФ области спектра.

Использование аperiодически поляризованных нелинейных кристаллов позволяет осуществить компрессию сверхкоротких световых импульсов. В кристалле LiNbO_3 с аperiоди-

ческой структурой получено уменьшение длительности импульсов в 150 раз.

Генерация высших гармоник привлекательна для решения ряда прикладных задач в УФ и в дальней УФ (EUV) областях спектра, получения фотонов высокой энергии. Газы, прозрачные в УФ области, дополнили класс прозрачных нелинейных кристаллов, используемых для процессов третьего порядка. Причем прямой процесс ГТГ, в отличие от ГВГ, разрешен всегда. При этом высокоэффективная генерация гармоник возможна при фазовом согласовании между волнами накачки и гармоники. Одной из перспективных схем коррекции нежелательного сдвига фаз между взаимодействующими волнами в нелинейной среде являются РДС.

Для прямой генерации третьей гармоники успешно используются кристаллы KDP, LiNbO₃, BBO, LBO. С целью повышения контрастности фемтосекундных импульсов на длине волны $\lambda=1.24$ мкм получена эффективность преобразования в третью гармонику лазерного излучения $\sim 26\%$ для кристалла LBO и 24% для кристалла KDP при оптимальной мощности накачки около 200 ГВт/см². Генерация третьей гармоники с квазифазовым согласованием была продемонстрирована с использованием простой кварцевой структуры с шестью периодами модуляции. Авторы считают, что при соответствующем развитии такое устройство могло бы стать практичным и недорогим альтернативным источником синего или ближнего ультрафиолетового излучения на основе обычных импульсных твердотельных лазеров ближнего инфракрасного диапазона. В эксперименте квазисинхронная генерация третьей гармоники была продемонстрирована с использованием простой кварцевой структуры с шестью периодами модуляции. При соответствующем развитии технологий изготовления подобных устройств оно может стать практичным и недорогим альтернативным источником синего или ближнего ультрафиолето-

вого излучения на основе обычных импульсных твердотельных лазеров ближнего инфракрасного диапазона.

С помощью процесса генерации суммарной частоты возможно эффективное преобразование ИК излучения в излучение видимого диапазона. Этот вид частотного преобразования достаточно часто применяется в слоистых структурах. Так например, при квазисинхронном взаимодействии процесс генерации суммарной частоты в голубой цвет был результатом суммирования излучения накачки (0.744 мкм) и излучения лазерной линии (1.084 мкм). Также возможна, чтобы вторая секции РДС производила голубой цвет (0.460 мкм) через суммарное частотное смещение накачки и холостой волны, произведенной в первой секции.

На сегодняшний день РДС-кристаллы успешно используются для получения RGB источников. Экспериментально реализовано в одном периодически поляризованном кристалле одновременно несколько нелинейно оптических процессов: оптическая параметрическая генерация, генерации суммарной частоты, а также генерация второй и третьей гармоник. Для этой цели был применен кристалл лития необута с двумя периодами «решетки» модуляции нелинейной восприимчивости. В первой секции осуществлялась оптическая параметрическая генерация сигнальной волны на $\lambda=1.43$ мкм и генерация суммарной частоты между сигнальной волной и волной накачки для получения красного цвета. Во второй секции одновременно имело место генерация второй и третьей гармоник.

Разработка малогабаритных источников когерентного излучения является актуальной проблемой физики лазеров, которую можно решить, используя новейшие достижения в этой области и современные методы нелинейной оптики. Как известно, внутрирезонаторное преобразование частоты, когда в пределах одного и того же резонатора происходит генерация излучения на одной частоте и преобразование его в излуче-

ние на другой частоте, —наиболее эффективный способ частотного преобразования. Последнее связано с тем, что при преобразовании частот лазеров, генерирующих в стационарном режиме, интенсивность излучения внутри лазерного резонатора гораздо выше интенсивности выходного излучения лазера, из-за малого значения коэффициента пропускания выходного зеркала. Поскольку эффективность преобразования в гармонику сильно зависит от интенсивности основного излучения, процесс преобразования частоты внутри резонатора происходит более эффективно, чем вне резонатора. И поэтому для лазеров с непрерывной накачкой использование внутрирезонаторной генерации гармоник позволяет достичь более высокого уровня эффективности преобразования.

Внутрирезонаторный способ преобразования возможно осуществить по крайней мере следующими двумя путями. Первый способ предполагает наличие в оптическом резонаторе двух необходимых элементов: активной среды лазера и нелинейной оптической среды. В активной среде, где предварительно создана инверсия населенностей, происходит лазерная генерация на частоте оптического перехода. Затем излучение, проходя через нелинейную оптическую среду, преобразуется в излучение на другой частоте (например, на частотах гармоник, волны суммарной, разностной частоты и т.п.). Для случая традиционных объёмных нелинейных сред данный способ преобразования частоты достаточно широко исследован.

Второй способ предполагает сочетание в одном оптическом элементе как активных свойств лазерной среды, где возможно индуцированное излучение, так и нелинейно-оптических свойств, предполагающих процесс частотного преобразования. Наиболее удачным вариантом оказалось использование в качестве нелинейных сред кристаллов, активированных редкоземельными ионами (например, Nd^{3+} , Er^{3+} , Yb^{3+}) и ис-

пользование для накачки полупроводниковых лазерных диодов (например, АТС-С1000-100-АМО, АТС-С1000-150-АМО). Исследования подобных оптических нелинейных сред продолжается по настоящее время. Однако даже технологическая разработка более совершенных однородных нелинейных кристаллов не позволила расширить возможности подобных частотных преобразователей. Следующим шагом явилось использование регулярных доменных структур (РДС), в которых осуществляется квазисинхронное взаимодействие оптических волн.

Теоретически процессы преобразования частоты излучения в режиме квазисинхронного взаимодействия еще до конца не изучены даже в случае традиционной генерации второй гармоники. Теории квазисинхронного взаимодействия в периодических нелинейных структурах, в частности при ГВГ, посвящен ряд работ. В этих работах авторы проводят анализ преобразования частоты, в основном, либо в ПЗП, либо используют численные методы анализа. С целью упрощения решения полученной системы уравнений авторы осуществляют замену приведенной длины и обобщенной расстройки фаз в кристалле как в целом. При этом длины доменов опять-таки считаются одинаковыми, а интенсивность основного излучения постоянна на всей длине нелинейной среды, т.е. значения на входе в первый слой и на выходе из n -го слоя имеют одинаковые значения.

В ПЗП когерентная длина нелинейной среды зависит исключительно от расстройки волновых векторов, а амплитуда и фаза основного излучения принимаются неизменными. Но данное упрощение справедливо лишь на начальном этапе взаимодействия, когда можно пренебречь как влиянием возбуждаемой волны гармоники на волну основного излучения, так и истощением накачки. В результате ряд важных качественных особенностей нелинейного процесса утрачивается.

Для анализа нелинейного процесса возможно использовать прямой численный счет связанных уравнений для каждого домена. Однако развитие аналитического метода позволит получить конкретные аналитические выражения и определить оптимальные параметры задачи с целью получения максимальной эффективности преобразования.

Ниже используются результаты анализа в ПЗИ. Здесь когерентная длина домена помимо расстройки взаимодействующих волн зависит от таких параметров задачи, как интенсивность основного излучения и потери в среде.

Квазисинхронные взаимодействия

Рассмотрим генерацию третьей гармоники в результате двух трехчастотных взаимодействий

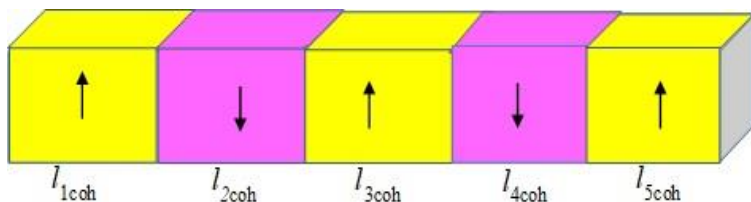
$$\begin{aligned}\omega + \omega &= 2\omega \\ \omega + 2\omega &= 3\omega,\end{aligned}$$

напоминающих каскадную генерацию третьей гармоники, но происходящую в пределах одного кристалла при общей волне накачки on frequency ω . При этом анализ будем проводить для нелинейной среды с квадратичной нелинейностью. Кроме того анализируем одновременную генерацию второй и третьей гармоник для случая попутного взаимодействия нелинейных оптических волн.

На второй, четвертой и т.д. когерентных длинах, согласно определению когерентной длины, происходит обратная перекачка энергии гармоники в волну накачки. При квазисинхронном взаимодействии за счет компенсации фазовой расстройки на четных когерентных длинах имеет место рост эффективности преобразования. В ПЗИ в отличие от результатов ПЗП оптимальная когерентная длина домена зависит от ин-

тенсивности накачки на входе в каждый домен. Так как в РДС при преобразовании частоты от слоя к слою интенсивность основного излучения уменьшается, то увеличивается оптимальная длина доменов, при которой эффективность преобразований максимальна. Отсюда с увеличением числа доменов их оптимальная длина увеличивается (рис. 36).

$$\Lambda = l_{1,coh} + l_{2,coh}$$



$$l_{1,coh} < l_{2,coh} < l_{3,coh} < l_{4,coh} < \dots$$

Рис. 36. Конструкция периодической структуры.

128. В чем заключается идея Бломбергена периодической коррекции рассогласования фаз в периодических структурах?

129. При генерации второй гармоники в РДС структурах при анализе в ПЗИ получаем более точное значение для когерентных длин доменов-слоев, которые отличаются от слоя к слою, увеличиваясь с возрастанием номера домена. Почему когерентная длина домена растет?

$$l_{1,coh} < l_{2,coh} < l_{3,coh} < l_{4,coh}, \text{ (рис. 37)}^{35}$$

³⁵Z.H. Tagiev, Rena J. Kasumova. Phase effects at second harmonic generation in the layer media. *Optics & Communications*, 2008, **281**, 814-823.

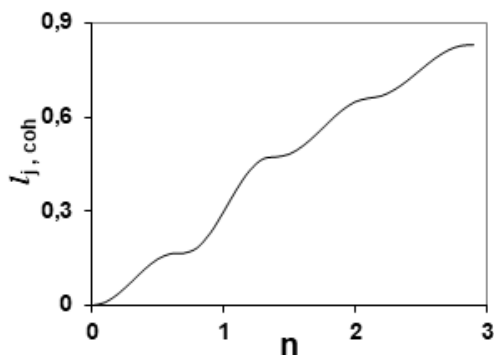


Рис. 37. Зависимость при ГВГ оптимальной длины доменов $l_{j,coh}$ от номера n слоя.

130. На рис. 38 приведены две кривые, соответствующие зависимости эффективности преобразования основного излучения во вторую и в третью гармоники в РДС от числа доменов. Процессу генерации какой гармоники соответствуют данные кривые 1 и 2?³⁶

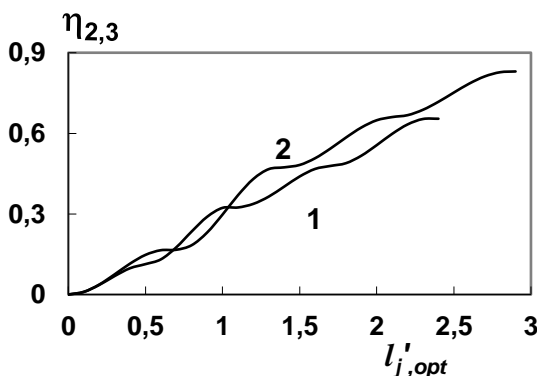


Рис. 38. Зависимость эффективности генерации гармоники от оптимальной длины доменов $l_{j,coh}$ при ГВГ (кривая 2) и ГТГ (кривая 1).

³⁶Z.H. Tagiev, Rena J. Kasumova, G.A. Safarova. Third-harmonic generation in regular domain structures. *Journal of Russian Laser Research*, 2010, **31**(4), 319-331.

131. Рассмотрим три слоя РДС структуры, из которых в первом слое происходит параметрическое усиление сигнальной волны, а два последующих слоя (второй и третий) образуют период доменной структуры с чередующимися направлениями спонтанной поляризации, где происходит генерация волны на суммарной частоте. При этом генерация суммарной частоты происходит в поле той же волны накачки, что и параметрическое усиление в первом слое. На выходе второго домена длины l_2 для эффективности преобразования в волну суммарной частоты $\eta_3(l_2) = I_3(l_2)/I_{po}$ получаем

$$\eta_3(l_2) = \eta_3(l_{1,opt}) \exp(-2\delta_3^{(2)}l_2) \left\{ \cos^2 \lambda l_2 + \Delta k^2 \frac{\sin^2 \lambda l_2}{\lambda^2} \right\},$$

где $\lambda = \sqrt{(\Gamma_p^{(2)})^2 + \frac{\Delta k^2}{4}}$, $(\Gamma_p^{(2)})^2 = \gamma_1^{(2)}\gamma_3^{(2)}I_{po}$, $\delta_{1,p,3}^{(2)}$, $\gamma_{1,p,3}^{(2)}$ – коэффициенты поглощения и нелинейного взаимодействия волн. Определить оптимальное значение фазовой расстройки Δk , при котором эффективность преобразования максимальна.³⁷

132. Эффективное преобразование частоты лазерного излучения в оптические гармоники и параметрические волны можно осуществить в слоистых структурах, где применяется сочетание процессов параметрического усиления и генерации суммарной частоты. Используем пятислойную структуру, в которой происходит ступенчатое, т.е. каскадное преобразование частоты. Сначала в первом слое имеет место экспоненциальное параметрическое усиление сигнальной волны начальной интенсивностью I_{10} . Затем процесс нелинейного преобразования частоты происходит в последующих четырех слоях,

³⁷Rena J. Kasumova. A. Karimi. Phase effects during parametric conversion in layer structures (Фазовые эффекты при параметрическом преобразовании в слоистых структурах). *Optics and Spectroscopy*, 2010, **108**(4) 624-627. (Оптика и спектроскопия, 2010, **108**(4), 664-667).

образующих регулярную доменную структуру с чередующимися направлениями спонтанной поляризации. Причем значения комплексных амплитуды основного излучения (A_p) и волны суммарной частоты (A_3) на выходе каждого домена являются входными значениями соответствующих комплексных амплитуд для следующего домена. Таким образом, реализуется эффективное каскадное преобразование частоты при низкочастотной накачке. В результате на рис 39 дана динамика роста эффективности преобразования $\eta_3(l_m)$ в каждом домене в зависимости от числа доменов. Здесь рассмотрены случаи отсутствия (кривые 1 и 2) и наличия входной волны на суммарной частоте (кривые 3-5) при разных уровнях интенсивности сигнальной волны (кривые 1 и 3-5). Провести анализ полученных кривых, основываясь на данных по кривым, приведенных в подписи к рисунку: от каких параметров зависит эффективность преобразования, как влияют интенсивности взаимодействующих волн?³⁸

133. Практический интерес представляет процесс преобразования частоты вверх, который осуществляется при сильной волне накачки на частоте ω_1 в процессе ГСЧ ($\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$). Рассмотрим систему из четырех доменов.

Расчет для такой системы из четырех доменов для комплексной амплитуды холостой волны на выходе четвертого домена при высокоинтенсивной накачке в ПЗИ дает следующее выражение ($\delta_3 = \delta_1 + \delta_2$)

$$A_3(l_4) = A_3(l_3) \exp\left(-\delta_3 l_4 - i \frac{\Delta k_4 l_4}{2}\right) \times$$

³⁸Z.H. Tagiev, R.J. Kasumova, A. Karimi. Cascade parametric light amplification at low-frequency pumping. *J. of Appl. Spectros.* 2010, **77**(3) 393-399 (Каскадное параметрическое усиление света при низкочастотной накачке). ЖПС, 2010, **77**(3), 393-399.

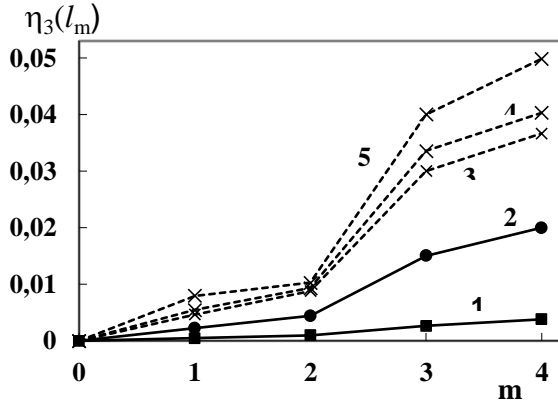


Рис. 39. Зависимости эффективности преобразования $\eta_3(l_m)$ от числа доменов m для $\lambda_m l_{m,opt} = \pi/2$, $\frac{\gamma_3^{(2)} \gamma_p^{(2)}}{\gamma_1^{(1)} \gamma_2^{(1)}} \cong 6$, $\Delta k_1 / 2\Gamma_p^{(1)} = 0.5$, $\Delta k_2 / 2\Gamma_p^{(1)} = 1$, $\delta_1^{(1)} / \Gamma_p^{(1)} = 0.1$, $\delta_3^{(2)} / \Gamma_p^{(1)} = 0.12$, $I_1 / I_{po} = 10^{-3}$ (кривые 2-5) и 10^{-4} (кривая 1). $\tilde{I}_3 = 0$ (кривые 1, 2), 10^{-5} (кривые 3), 10^{-4} (кривая 4) и 10^{-3} (кривая 5).

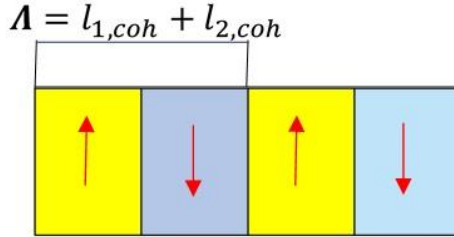


Рис. 40. РДС из четырех доменов, составляющих 2 периода решетки восприимчивости.

$$\times \left[\cos \lambda_4 l_4 + i \left(\frac{\Delta k_3}{2} - \frac{\lambda_3^2}{\Delta k - \frac{\lambda_2^2}{\Delta k}} + \frac{\Delta k_4}{2} \right) \frac{\sin \lambda_4 l_4}{\lambda_4} \right].$$

Здесь $\Delta k_1 = \Delta k_2 = \Delta k$, а $\Delta k_3 \neq \Delta k_4$, $\lambda_2 = \sqrt{\Gamma_2^2 + \frac{\Delta k^2}{4}}$, $\Gamma_2^2 = \gamma_1 \gamma_3 I_{20}$, γ_j – коэффициенты нелинейной связи, I_{20} – интенсивность волны накачки на входе в структуру. Получить выражение для когерентной длины четвертого домена в случае РДС-кристалла, собранного из 4 слоев-доменов с одинаковыми нелинейными коэффициентами ($\Delta k_3 = \Delta k_4$).³⁹

134. Рассмотрим процесс нелинейного взаимодействия в РДС-кристалле при генерации суммарной частоты. Полагаем, что структура собрана из n слоев с инвертированными оптическими осями. В ПЗИ получается следующее выражение для комплексной амплитуды волны суммарной частоты на выходе первого домена ($z = l_1$)

$$A_3(l_1) = -i\gamma_3 A_{10} A_{20} l_1 \text{sinc} \lambda_1' l_1 \exp[i\varphi_{10} + i\varphi_{20} - (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + i\Delta k_1)l_1/2],$$

где

$$\lambda_1' = \sqrt{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 - \frac{(\delta_3 - \delta_1 - \delta_2 - i\Delta k_1)^2}{4}},$$

$$\Gamma_1^2 = \gamma_2 \gamma_3 I_{10}, \Gamma_2^2 = \gamma_1 \gamma_3 I_{20}.$$

Получить аналитическое выражение для когерентной длины первого домена, т. е. оптимальную длину домена, обеспечивающую максимальную амплитуду волны суммарной частоты.⁴⁰

³⁹R.J. Kasumova, A. Karimi. Efficiency of sum frequency generation by regular domain structures. *J. of Appl. Spectros.* 2010, 77(1) 144-147 (ЖПС, 2010, **77**(1), 153-156).

⁴⁰R.J. Kasumova. Quasi-phase-matched sum-frequency generation in layered structures. *J. of Appl. Spectros.* 2011, **78**(5) 659-667. Квазисинхронная генерация излучения суммарной частоты в слоистых структурах. ЖПС, 2011, **78**(5), 707-715.

Внутрирезонаторный способ частотного преобразования в РДС

Внутрирезонаторный способ частотного преобразования в РДС предполагает сочетание в одном оптическом элементе как активные свойства среды, где возможны индуцированные переходы, так и нелинейно оптические свойства, подразумевающие процесс частотного преобразования в РДС системе (рис. 41). Положим, что РДС состоит из кубично нелинейных слоев-доменов. В тоже время боковые поверхности первого и последнего домена играют роль зеркал оптического резонатора. Таким образом за счет квантовых переходов активная среда испускает индуцированное излучение на основной частоте ω , т.е. происходит генерация лазерного излучения. Затем лазерная волна, распространяясь в РДС, возбуждает волну третьей гармоники. Волна гармоники и основное излучение после отражения от правого зеркала, нелинейно взаимодействуя в среде,

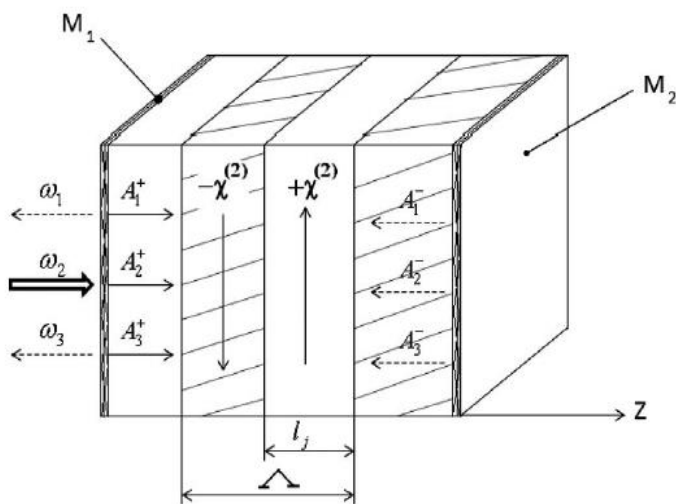


Рис. 41. РДС структура, где боковые грани играют еще роль зеркал, образуя оптический резонатор.

распространяются теперь уже в обратном направлении в РДС. Так завершается полный обход резонатора.

135. При внутрирезонаторном преобразовании частоты важно фазовое соотношение между взаимодействующими волнами. На снимке рассматривается трехчастотное взаимодействие в оптическом резонаторе. Для эффективного преобразования необходимо выполнение оптимального фазового соотношения между взаимодействующими волнами. Какие параметры должны входить в данное фазовое соотношение?⁴¹

136. Рассмотрим РДС- структуру, образованную из инвертированных слоев-доменов с квадратичной нелинейностью, размещённую внутри лазерного резонатора (рис. 42). Предполагается, что роль отражательных поверхностей резонатора слева и справа играют боковые поверхности РДС-кристалла.

Увеличение числа доменов не дает существенного увеличения эффективности частотного преобразования. Поэтому дальнейшее рассмотрение проводится на примере регулярной доменной структуры, состоящей из двух периодов «решетки» модуляции нелинейной квадратичной восприимчивости, т.е. для четырех доменов. Для ясности рассмотрения слои-домены, проходимые в обратном направлении, обозначим пятым (бывший четвёртый), шестым (бывший третий) и т.д. номерами, как если бы структура состояла не из 4, а из 8 доменов. Только учтем, что между четвёртым и пятым доменами чередование знаков нелинейной восприимчивости

⁴¹З.А.Тагиев, Р.Дж. Касумова, Ш.Ш.Амиров. Теория внутрирезонаторной генерации второй гармоники в приближении заданной интенсивности. Оптика и спектр. 1993, **75**(4), вып. 4, 908-913;

З.А.Тагиев, Р.Дж. Касумова, Ш.Ш.Амиров, Э.М.Гамидов. Каскадная генерация третьей гармоники в лазерном резонаторе. Квантовая электроника, 1994(4), №10, 968-970.

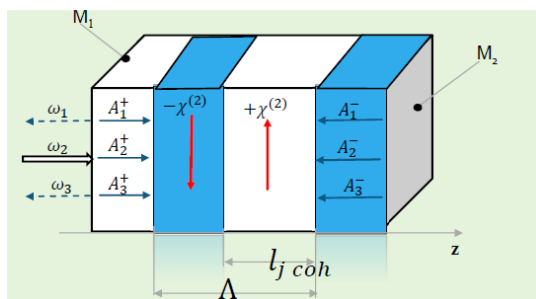


Рис. 42. РДС-структура, образованную из инвертированных слоев-доменов с квадратичной нелинейностью внутри лазерного резонатора.

нарушается, так как это один и тот же домен. Эти два домена можно сказать образуют один домен с длиной, равной удвоенной длине четвертого домена. При этом необходимо учесть вклад внутрирезонаторного преобразования, а именно, что на границе между четвертым и пятым доменами появляется фазовый сдвиг, благодаря отражению волн от лазерного зеркала. В результате эффективность преобразования в волну суммарной частоты в зависимости от длин доменов показана на рис. 43. Объяснить поведение кривых 1-6.⁴²

137. Рассмотреть процесс генерации третьей гармоники. Написать граничные условия для комплексных амплитуд основной волны и волны третьей гармоники на входе в домен под номером n при внутрирезонаторном преобразовании. Для случая РДС, состоящего из четырех доменов (как на рис. 49) написать граничные условия после отражения от правого зеркала, т.е. в отрицательном направлении оси z .⁴³

⁴²Rena J. Kasumova. Quasi-phase-matched intracavity laser frequency summation. *Applied Optics*, 2012, **51**(13), 2250-2256.

⁴³Rena J. Kasumova, G.A. Safarova. Quasi-phase-matched third harmonic generation theory for a two-pass conversion arrangement. *J. of Appl. Spectroscopy. Журнал прикладной спектроскопии*, 2012, **79**(6), 874-880.

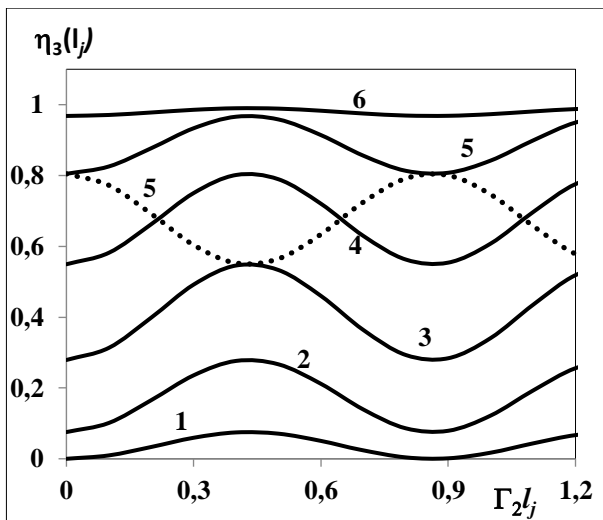


Рис. 43. Зависимости эффективности внутрирезонаторного преобразования при генерации суммарной частоты $\eta_3(l_j)$ от приведенных длин слоев $\Gamma_2 l_j$, $j = 1 \div 6$, вычисленные в приближении заданной интенсивности, при $\delta_{1,2,3} = 0$ для $\Delta k/2\Gamma_2 = 3.5$, $\lambda_j l_{j,opt} = \frac{\pi}{2}$, $j = 1 \div 4$. $\eta_3(l_1)$ от $\Gamma_2 l_1$ – кривая 1, $\eta_3(l_2)$ от $\Gamma_2 l_2$ при $\Gamma_2 l_{1,opt}$ – кривая 2, $\eta_3(l_3)$ от $\Gamma_2 l_3$ при $\Gamma_2 l_{1,opt}$, $\Gamma_2 l_{2,opt}$ – кривая 3, $\eta_3(l_4)$ от $\Gamma_2 l_4$ при $\Gamma_2 l_{1,opt}$, $\Gamma_2 l_{2,opt}$, $\Gamma_2 l_{3,opt}$ – кривая 4, $\eta_3(l_5)$ от $\Gamma_2 l_5$ при $\Gamma_2 l_{1,opt}$, $\Gamma_2 l_{2,opt}$, $\Gamma_2 l_{3,opt}$, $\Gamma_2 l_{4,opt}$ – сплошная и пунктирная кривые 5, $\eta_3(l_6)$ от $\Gamma_2 l_6$ при $\Gamma_2 l_{1,opt}$, $\Gamma_2 l_{2,opt}$, $\Gamma_2 l_{3,opt}$, $\Gamma_2 l_{4,opt} = \Gamma_2 l_{5,opt}$ – кривая 6. Здесь $\psi = \psi_{opt}$ (сплошная кривая 5), 0 (пунктирная кривая 5).

138. Рассмотрим случай параметрического взаимодействия, когда оптические волны на частотах ω_p (условно сильная волна известна как волна накачки) and ω_i (холостая волна) взаимодействуют в диссипативной нелинейной оптической среде длины l и производят на выходе сигнальную волну на частоте ω_s ($\omega_p = \omega_s + \omega_i$). В этом случае для комплексной амплитуды сигнальной волны в ПЗИ получается выражение

$$A_s(l) = A_{so} \exp\left(i\varphi_{so} - \frac{\delta_s - i\Delta k}{2}l\right) \left[\cosh q_1 l - \left(P + i\gamma_s \frac{A_{io}^* A_{po}}{A_{so}} e^{i(\phi_{po} - \phi_{io} - \phi_{so})} \right) \frac{\sinh q_1 l}{q_1} \right] \quad (p^2 > 4q).$$

Здесь

$$\begin{aligned} \delta &= \delta_s + \delta_i + \delta_p, \quad p = \delta - i\Delta k, \quad q_1^2 = \frac{p^2}{4} - q, \\ q &= \Gamma_i^2 - \Gamma_p^2 + \delta_s(\delta_i + \delta_p - i\Delta k), \quad \Gamma_i^2 = \gamma_s \gamma_p I_{io}, \\ \Gamma_p^2 &= \gamma_s \gamma_i I_{po}, \quad P = (\delta_s - \delta_i - \delta_p + i\Delta k)/2, \quad \Delta k = k_p - k_s - k_i. \end{aligned}$$

Как известно, параметрический процесс имеет пороговый характер. Из данного выражения определить пороговое значение амплитуды волны накачки в ПЗИ.⁴⁴

Последовательные квазисинхронные взаимодействия

Области практического применения существенно расширяются при реализации последовательных квазисинхронных взаимодействиях с общей волной накачки. В случае сред с квадратичной нелинейностью при общей волне накачки количество возможных параметрических процессов увеличивается. Исследования показали, что при последовательных взаимодействиях выбирая период модуляции нелинейной восприимчивости и порядки квазисинхронизма для разных гармоник можно наблюдать их одновременную генерацию рис. 44). Это означает возможность получить на практике с помощью одного лазера и периодически поляризованного кристалла источник когерентного излучения, одновременно генерирующий на нескольких оптических гармониках. Для этого

⁴⁴Rena J. Kasumova. *Optical parametric interaction in infrared region crystals. J. of Non-linear Optical Physics & Materials*, 2013, **22**(3), 1350033-1-1350033-9.

надо определить интересный для разработчиков диапазон частот, подобрать лазер с необходимой длиной волны и тип нелинейного взаимодействия.

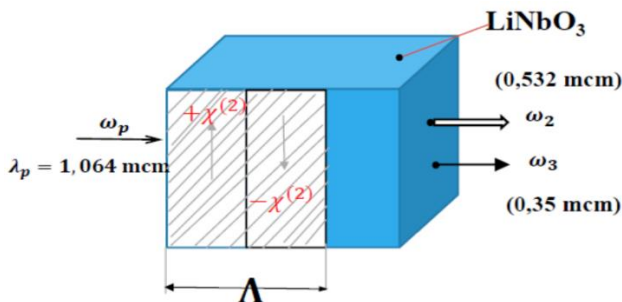


Рис. 44. Последовательное квазисинхронное взаимодействие

При последовательных квазисинхронных генерациях одновременно на второй и третьей гармониках условия квазисинхронизма для этих гармоник будут выполняться на разных порядках квазисинхронизма, благодаря разным фазовым скоростям для волн накачки, второй и третьей гармоник в пределах периода модуляции нелинейной восприимчивости Λ . При генерации второй гармоники условие квазисинхронизма определяется соотношением $\Delta k_2 = M_2 2\pi / \Lambda$, а при генерации третьей гармоники – $\Delta k_3 = M_3 2\pi / \Lambda$, где $\Delta k_{2,3}$ – волновые расстройки взаимодействующих волн при генерации второй $\Delta k_2 = k_2 - 2k_1$ и третьей $\Delta k_3 = k_3 - k_2 - k_1$ гармоник, $M_{2,3} = 2m_{2,3} + 1$ – порядки квазисинхронизма, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Дальнейший анализ будем проводить для случая е-е взаимодействия в кристалле LiNbO_3 , обладающем высокой оптической нелинейностью (для сравнения $d_{33}=34.4$ pm/V, $d_{31}=d_{15}=5.95$ pm/V, $d_{22}=3.07$ pm/V). Как следствие, этот тип взаимодействия приводит к гораздо более высокой эффективности нелинейного преобразования. Как показывает эксперимент в кристалле $\text{LiNbO}_3:\text{Y}$ с РДС (период модуляции $\Lambda=60$

мкм) при использовании в качестве волны накачки излучения Nd:YAG лазера ($\lambda = 1.06$ мкм) для генерации второй гармоники при ее-е взаимодействии компенсация фазовой расстройки происходит на 9 порядке квазисинхронизма, а для третьей гармоники – на 33 порядке квазисинхронизма. В оптическом диапазоне длина волны λ и период модуляции Λ одного порядка или $\Lambda \geq \lambda$ (что соответствует нашему случаю), поэтому Λ играет определяющую роль в процессе взаимодействия. Задача эффективного квазисинхронного преобразования, т.е. фазового согласования между оптическими волнами в нашем случае последовательного взаимодействия сводится к подбору требуемых значений Λ и $M_{2,3}$, т.е., напрямую зависит от этих двух параметров.

139. Рассмотрим период модуляции и волновые расстройки для кристалла LiNbO_3 . В этом случае фазовая расстройка для генерации второй гармоники имеет вид $\Delta k_2 = k_2^e - 2k_1^e = M_2^{eee} \frac{2\pi}{\Lambda_2^{eee}}$, где $M_2^{eee} = 2m_2 + 1$, ($m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) – порядок квазисинхронизма, Λ_2^{eee} – период модуляции квадратичной восприимчивости в РДС-кристалле для генерации второй гармоники при последовательном ее-е взаимодействии. Для генерации третьей гармоники имеем $\Delta k_3 = k_3^e - k_2^e - k_1^e = M_3^{eee} \frac{2\pi}{\Lambda}$, где $M_3^{eee} = 2m_3 + 1$, ($m_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) – порядок квазисинхронизма при последовательной генерации третьей гармоники при ее-е взаимодействии. Рассчитать периоды модуляции $\Lambda_{2,3}^{eee}$.⁴⁵

⁴⁵Z.H. Tagiev, Rena J. Kasumova, N.V. Kerimova, G.A. Safarova. Consecutive three-wave mixing in optical superlattice at backward second harmonic wave. *Journal of Russian Laser Research*, 2020, **41**(1), 21-27.

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ. ЧЕТЫРЕХВОЛНОВОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

Параметрические процессы – это процессы, происходящие без энергообмена между средой и распространяющейся в ней волной. При этих процессах среда играет пассивную роль. Примерами параметрических процессов являются генерация гармоник, четырехволновое смешение, параметрическое усиление и генерация. Непараметрические процессы – это ВКР, ВРМБ, комбинационное рассеяние света, КАРС. В этих процессах нелинейная среда активна, так как при этих процессах рассеяния участвуют колебания молекул нелинейной среды.

Таким образом, параметрические процессы обусловлены нелинейным взаимодействием оптических волн, посредством наведенной нелинейной поляризации среды, в результате которого изменяются параметры среды. Одной из важных характеристик нелинейных взаимодействий является эффективность, с которой энергия волны накачки трансформируется в энергию генерируемой или усиливаемой волны. При этом существует ряд конкурирующих процессов, влияющих на скорость передачи энергии. Однако, несмотря на то что теоретически показана принципиальная возможность практически полной перекачки излучения основной волны в волну гармоники, для реализации последней необходимо выполнение целого ряда требований к параметрам пучков и нелинейных сред. Для эффективного протекания параметрического взаимодействия необходимо выполнение соответствующих условий как по частотам, так и по волновым векторам взаимодействующих волн.

Дальнейшее развитие исследований по взаимодействию излучения с нелинейной средой требует разработки мощных лазерных систем. За прошедшие годы эти системы доведены до достаточной степени совершенства, для чего необходимо

наличие высокого качества оптических элементов системы. Эффект обращения волнового фронта при вырожденном четырёхволновом взаимодействии позволяет создать мощные лазеры с менее жёсткими требованиями к оптическим свойствам элементов. Вслед за пионерскими работами многочисленные исследования эффекта обращения волнового фронта в различных материалах, поиски новых методов обращения волнового фронта, основанных на других видах нелинейно оптического взаимодействия, продолжаются и по сей день. Вырожденное четырёхволновое взаимодействие в нелинейной среде обуславливает помимо обращения волнового фронта такие эффекты, как усиление сигнальной и отражённой волн, генерация обратной волны.

Четырёхволновое смешение – это эффективный способ получения лазерного излучения на новых оптических частотах. Четырёхволновое взаимодействие может происходить в любой среде, где проявляется нелинейная восприимчивость третьего порядка. Причиной, в частности, вырожденного четырёхволнового взаимодействия является, например, нелинейный показатель преломления, насыщение линейного поглощения, двухфотонное поглощение. Вырожденное четырёхволновое смешение осуществляется при различных геометриях, среди них отметим две наиболее широко используемые: взаимодействия попутных и встречных волн (рис. 45).

Геометрия встречных волн обладает преимуществом по сравнению со случаем встречных волн, заключающемся в том, что требование фазового согласования, т.е. эффективного взаимодействия между модами выполняется автоматически при любых углах между волнами накачки и сигнальной или обратной волной.

При четырёхволновом смешении закон сохранения энергии выглядит следующим образом: $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4$, а закон сохранения импульса в виде: $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}_3 + \vec{k}_4$. При встречном взаимодействии условие фазового синхронизма

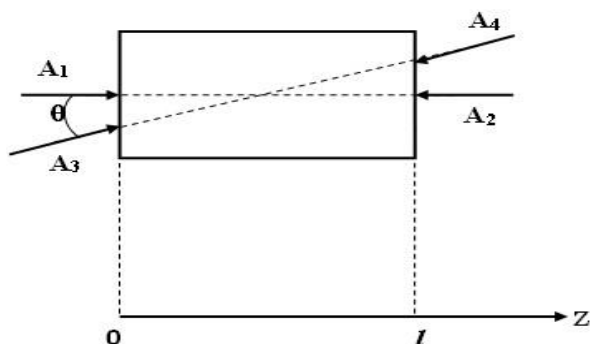


Рис. 45. Схема вырожденного четырёхволнового взаимодействия (встречная геометрия).

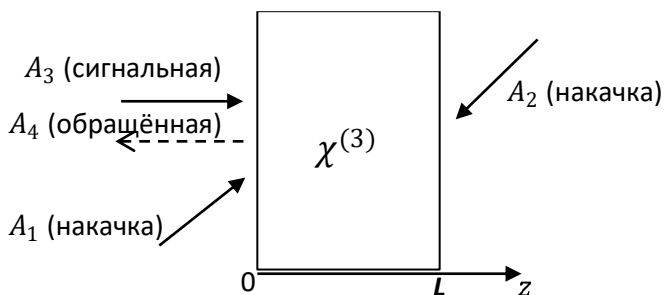


Рис. 46. Схема встречного ЧВ взаимодействия в кубичной нелинейной среде: A_1 и A_2 – сильные волны накачки, распространяющиеся в строго противоположных направлениях, A_3 – сигнальная волна, A_4 – генерируемая обращенная волна, параллельная сигнальной волне.

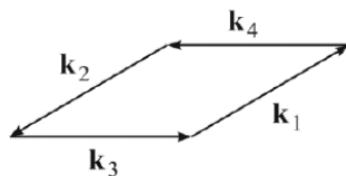


Рис. 47. Взаимодействие между четырьмя фотонами.

имеет вид $\Delta \vec{k} = \vec{k}_4 - (\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3) = 0$. Взаимодействие является вырожденным, когда частоты всех четырех волн одинаковы, т.е. $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega$.

При теоретическом анализе вырожденного четырехволнового взаимодействия в общем случае получение аналитических решений в замкнутом виде не представляется возможным. Поэтому для исследования этого процесса в основном пользуются приближением заданного поля накачки, в котором не учитывается изменение фаз взаимодействующих волн, а также затухание волн в нелинейной среде, и борновским приближением. Анализ в ПЗИ данного взаимодействия в диссипативной среде позволил рассмотреть усиление и генерацию волн, обращение волнового фронта с учётом влияния фазы сигнальной и обратной волн на фазу волн накачки и потерь взаимодействующих волн в среде.

140. В процессе нелинейного смещения волн на трех частотах ($\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$), например, при сложении частот излучения двух лазеров, интенсивность выходного сигнала на ω_3 , как правило, бывает меньше, чем интенсивность волны накачки на входе. Как в этом случае установить, что сигнал на выходе — это не рассеянное входное излучение, а результат генерации суммарной частоты?

141. При встречном взаимодействии сильные волны накачки E_1 и E_2 падают на нелинейную среду с противоположных направлений (рис. 48). Сигнальная волна на частоте ω_3 падает под небольшим углом θ к волнам накачки. Показать, что при встречном вырожденном четырехволновом взаимодействии условие фазового синхронизма выполняется автоматически независимо от угла падения θ .

142. При вырожденном встречном четырехволновом взаимодействии в ПЗИ для комплексной амплитуды сигнальной волны получается следующее выражение

$$A_3(z) = A_3(0) \cdot \exp(\sigma z) \times \\ \times \left[\cos \alpha_3 z - \frac{\sigma \cos \alpha_3 l - \alpha_3 \sin \alpha_3 l + \delta_3 \cos \alpha_3 l}{\sigma \sin \alpha_3 l + \alpha_3 \cos \alpha_3 l + \delta_3 \sin \alpha_3 l} \sin \alpha_3 z \right],$$

где

$$\sigma = -(\delta_1 - \delta_2 + \delta_3 - \delta_4)/2,$$

$$\alpha_3 = \sqrt{\gamma_3 \gamma_4 I_1 I_2 - \delta_3 (\delta_4 + \delta_2 - \delta_1) - \sigma^2}.$$

Здесь нелинейная среда находится в области $0 < z < l$, $A_{1,2}$ – комплексные амплитуды волн накачки, A_3 – комплексная амплитуда сигнальной волны, A_4 – комплексная амплитуда волны, встречной волне A_3 , $\Delta \vec{k} = \vec{k}_4 - (\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3)$, γ_j – коэффициенты нелинейной связи, δ_j – коэффициенты линейного поглощения. Определить оптимальную длину нелинейной среды, при которой интенсивность сигнальной волны достигает максимума.⁴⁶

143. При вырожденном встречном четырехволновом взаимодействии в ПЗИ интенсивность сигнальной волны выражается формулой ($\gamma_j = \gamma$)

$$I_3(z) = e^{2\sigma z} \times \\ \times \left\{ I_3(0) \left[\cos \alpha_5 z - \frac{\sigma \cos \alpha_5 l - \alpha_5 \sin \alpha_5 l + \delta_3 \cos \alpha_5 l}{\sigma \sin \alpha_5 l + \alpha_5 \cos \alpha_5 l + \delta_3 \sin \alpha_5 l} \sin \alpha_5 z \right]^2 + \right. \\ \left. + \frac{\gamma^2 I_1 I_2 I_4 \exp[-2l(\sigma + \delta_1)]}{(\sigma \sin \alpha_5 l + \alpha_5 \cos \alpha_5 l + \delta_3 \sin \alpha_5 l)^2} \sin^2 \alpha_5 z \right\},$$

⁴⁶З.А. Тагиев, Р.Дж. Касумова, Р.А. Салманова. Теория вырожденного четырехволнового взаимодействия в приближении заданной интенсивности. Оптика и спектр. 1999 **87**(1), 94-97 ((Theory of degenerate four-wave mixing in the prescribed intensity approximation. Optics and spectroscopy, 1999, **87**(1), 94-97).

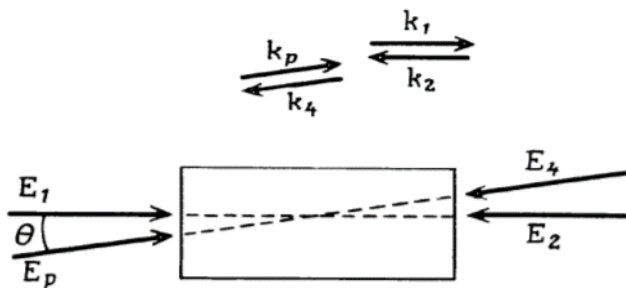


Рис. 48. Геометрия встречного взаимодействия.

где

$$\alpha_5 = \sqrt{\gamma^2(I_2 I_4 + I_1 I_2 - I_1 I_4) - \delta_3(\delta_4 + \delta_2 - \delta_1) - \sigma^2},$$

$$\sigma = -(\delta_1 - \delta_2 + \delta_3 - \delta_4)/2,$$

а интенсивность обратной волны выражается формулой ($\gamma_j = \gamma$)

$$I_4(z) = e^{2\sigma z} \{ M^2 [(\sigma - \delta_4) \sin \alpha_6 z - \alpha_6 \cos \alpha_6 z]^2 + [N \sin \alpha_6 z - T \cos \alpha_6 z]^2 \},$$

где

$$M = \frac{A_4(l) \exp(-\sigma l)}{(\sigma - \delta_4) \sin \alpha_6 l - \alpha_6 \cos \alpha_6 l},$$

$$N = \frac{\gamma A_1(0) A_2(l) A_3^*(0) \exp(-\delta_2 l) \cos \alpha_6 l}{(\sigma - \delta_4) \sin \alpha_6 l - \alpha_6 \cos \alpha_6 l},$$

$$T = \frac{\gamma A_1(0) A_2(l) A_3^*(0) \exp(-\delta_2 l)}{(\sigma - \delta_4)} \left[1 + \frac{\alpha_6 \cos \alpha_6 l}{(\sigma - \delta_4) \sin \alpha_6 l - \alpha_6 \cos \alpha_6 l} \right],$$

$$\alpha_6 = \sqrt{\gamma^2(I_1 I_3 + I_1 I_2 - I_2 I_3) - \delta_4(\delta_1 - \delta_2 + \delta_3) - \sigma^2}.$$

Определить коэффициент отражения зеркала $R = \frac{I_4(0)}{I_3(0)}$,
обращающего волновой фронт.⁴⁷

⁴⁷З.А. Тагеев, Р.Дж. Касумова, Р.А. Салманова. Теория вырожденного четырехволнового взаимодействия в приближении заданной интенсивности. Оптика и спектр. 1999, **87**(1), 94-97 ((Theory of degenerate four-wave mixing in the prescribed intensity approximation. Optics and spectroscopy, 1999, **87**(1), 94-97).

ВОЛОКОННАЯ ОПТИКА

Как известно, в оптоволоконных системах связи информация передается с помощью световой волны. При интенсивностях лазерного излучения, превышающих пороговое значение, проявляются нелинейнооптические эффекты. Благодаря пространственному ограничению светового пучка в волокне, нелинейные эффекты проявляются уже при пороговой мощности лазерного излучения в 10 мВт. Волокно уже не играет пассивную роль, изменяются условия распространения оптического сигнала по волокну. Лазерное излучение изменяет оптические характеристики волокна и это приводит к эффекту самовоздействия. В случае распространения по волокну одновременно двух или более сигналов на разных лазерных частотах обнаруживается дополнительный нелинейный эффект, а именно перекрестное взаимодействие. В кубичных нелинейных средах волокна, благодаря оптическому эффекту Керра, проявляется четырехволновое взаимодействие. В этом случае три лазерные волны порождают четвертую волну. Четырехволновое смешение является параметрическим процессом третьего порядка. Особенно сильно этот эффект проявляется при выполнении условия фазового синхронизма между взаимодействующими волнами. При четырехволновом смешении в сильных лазерных полях преобразование частоты, сопровождающееся эффектами само- и кросс-модуляции, приводит к изменению фазовых соотношений между волнами, нарушению оптимального фазового соотношения. Поэтому важным и актуальным является детальное изучение нелинейных эффектов самовоздействия и перекрестного взаимодействия волн при четырехволновом смешении, исследование способов управления данным процессом для подавления вредного влияния эффекта четырехволнового взаимодействия на процесс передачи информации на большие расстояния.

Производители и разработчики оптоволоконных систем

связи вынуждены учитывать нелинейные оптические эффекты, которые возникают при прохождении лазерного сигнала по волокну. Нелинейность оптоволокна не является технологическим дефектом производства волокна. Это свойство проявляется в любой материальной среде, по которой распространяется мощное лазерное излучение. В настоящее время это особенно остро проявляется в DWDM (Dense Wavelength Division Multiplexing – плотное мультиплексирование с разделением по длине волны) системах при передаче высокоскоростной цифровой информации. При подобном способе передачи информации такой нелинейно оптический эффект, как четырехволновое смешение является самым вредным эффектом. С целью повышения скорости передачи информации было разработано волокно со смещенной нулевой дисперсией (DSF – Dispersion Shifted Fibers – волокна со смещенной дисперсией), где, используя специальный профиль показателя преломления сердцевины, длина волны нулевой дисперсии составляет 1.55 мкм. Однако в системах со спектральным разделением каналов в DWDM сильно сказывается четырехволновое смешение, что приводит к взаимным помехам каналов. По этой причине необходимо было разработать новый тип волокна. В настоящее время для минимизации этого эффекта разрабатываются волокна с ненулевой смещенной дисперсией (NZDSF – Non zero dispersion shifted fiber), где длины волн нулевой дисперсии расположены вне рабочего диапазона длин волн.

Для исследования нелинейного взаимодействия в оптоволокне рассматривается бегущая световая волна, распространяющаяся вдоль волокна и пространственно-ограниченная в поперечном направлении. Это приводит к рассмотрению зависимости амплитуды электромагнитной волны от поперечных к оси волокна координат. Следует отметить, что в оптическом волокне возникает сильное оптическое поле, связанная с пространственным ограничением лазерного пучка, и

большая длина нелинейного взаимодействия. Последнее ведет к росту процесса накопления нелинейного эффекта, так как разность фаз между волной поляризации и генерируемой компонентой рассеяния остается постоянной на достаточно больших расстояниях, не превышающих когерентную длину. Если в обычной среде когерентная длина порядка мкм, то в оптоволокне гораздо выше. Таким образом, в оптоволокне реализуется высокая эффективность нелинейного процесса на больших эффективных длинах взаимодействия при низких входных интенсивностях накачки. При постоянных поперечных размерах оптоволокна потери ограничивают эффективную длину взаимодействия.

144. В ПЗИ возможно рассмотрение эффекта самовоздействия в квадратично нелинейной среде, т. е. зависимость $\varphi_1(z)$, что невозможно в ПЗП. Для этого надо сперва перейти к вещественным амплитудам и фазам волны накачки и волны ВГ. Затем в уравнении для волны накачки: $\frac{dA_1}{dz} = -i\gamma_1 A_1^* A_2 \exp(-\Delta k_1 \cdot z)$ перейти к $a_{1,2}(z)$ и $\varphi_{1,2}(z)$. Исходя из укороченных уравнений для ВГ, аналитически получить выражение для эффекта самовоздействия $\varphi_1(z)$ в оптоволокне при генерации второй гармоники.⁴⁸

145. Сравнить длину дисперсионного расплывания L_{dis} для двух оптических импульсов пикосекундной длительности и 10 фс. Принять $\frac{d^2k}{d\omega^2} \approx 10^{-27} \text{ с}^2/\text{см}$.

146. При частично вырожденном четырехволновом смешении в оптоволокне в ПЗИ для комплексной амплитуды сигнала четырехволнового смешения на выходе волокна получаем

⁴⁸Z.H. Tagiev, R.J. Kasumova. *Theoretical studies on frequency doubling in glass optical fibers in constant-intensity approximation. Optics & Communications*, 2006, **261**, 258-265.

$$A_s(z) = A_{so} e^{\sigma z} \times \left\{ \cos \lambda z + \left[\frac{2\delta_p + \delta_i - \delta_s}{2} + i \left(b - \frac{\Delta + \Delta_{SM} + \Delta_{XM}}{2} \right) \right] \frac{\sin \lambda z}{\lambda} \right\},$$

где

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{2\delta_p + \delta_i + \delta_s}{2} + \frac{i}{2} [\Delta + (2\gamma_p^p + \gamma_s^p - \gamma_i^p) I_{po} + (2\gamma_p^s - \gamma_i^s + \gamma_s^s) I_{so} + (2\gamma_p^i + \gamma_s^i - \gamma_i^i) I_{io}], \\ (\lambda^2)^{CIA} &= \Gamma^2 - \left(\frac{2\delta_p + \delta_i - \delta_s}{2} - i \frac{\Delta + \Delta_{SM} + \Delta_{XM}}{2} \right)^2, \quad b = \frac{\gamma_s A_{po}^2 A_{io}^*}{A_{so}}, \\ \Gamma^2 &= \gamma_s \gamma_i I_{po}^2 - 2\gamma_s \gamma_p I_{po} I_{io}, \quad I_j = A_j \cdot A_j^*, \\ (\Delta_{SM})^{CIA} &= 2\gamma_p^p I_{po} - \gamma_s^s I_{so} - \gamma_i^i I_{io}, \quad (\Delta_{XM})^{CIA} = (2\gamma_p^s - \gamma_i^s) I_{so} + (2\gamma_p^i - \gamma_s^i) I_{io} - (\gamma_s^p + \gamma_i^p) I_{po}. \end{aligned}$$

Получить результат в ПЗП, полагая $\gamma_p, \gamma_p^{p,s,i}, \delta_p=0$.⁴⁹

Распространение оптических импульсов в кубически нелинейной среде

При распространении светового импульса по волокну наблюдается эффект самомодуляции и перекрестной модуляции. Если первый эффект связан с воздействием сильной лазерной волны на оптические свойства среды, то второй эффект происходит при распространении второго лазерного пучка по данной оптически измененной нелинейной среде. Перекрестная модуляция проявляется при взаимодействии двух лазерных пучков, распространяющихся по оптоволокну. Как видно в отличие от линейной оптики, где принципа суперпозиции выполняется, здесь в оптике сильных лазерных полей, т.е. в нелинейной оптике данный принцип не работает.

⁴⁹Rena J. Kasumova. *Effects of self- and cross-phase modulations at four wave mixing in optical fiber. Journal of Russian Laser Research, 2022, 43(2), 186-192.*

Характерным проявлением перекрестной модуляции в радиодиапазоне является эффект Люксембург – Горькова, названный в честь двух радиостанций, расположенных в этих городах (исторический факт). В качестве нелинейной среды в этом эффекте выступает проводящая область атмосферы (ионосфера) причем проводимость ионосферы зависит от сильных радиоволн. Сильный модулированный радиосигнал, излучаемый первым источником, модулирует проводимость ионосферы вблизи данного источника сигнала. Модулированный сигнал со второго источника направляют через эту область. В результате сигнал со второго источника модулируется по закону модуляции первого сигнала и радиосигнал с первого источника может принимать не только первый, но и второй источник. В этом и заключается эффект Люксембурга – Горькова.

Изменение мгновенной частоты импульса со временем, т.е. частотная модуляция также называется чирпом импульса. При фазовой самомодуляции происходит уширение спектра импульса, так как разные участки импульса находятся под разными значениями интенсивности, что ведет к разным нелинейным фазовым сдвигам. Появляются новые частоты в спектре импульса. На переднем фронте происходит частотный сдвиг в стоксовую область (красную область частот), а на заднем фронте – в антистоксовую часть (в синюю область спектра). Фазовая скорость стоксовых компонент выше, чем антистоксовых вдали от поглощения, поэтому фазовая самомодуляция способствует более быстрому уширению импульса, чем дисперсионное уширение. Отметим, что в случае линейной дисперсии ширина спектра импульса не меняется. В области аномальной дисперсии появляется отрицательная частотная модуляция из-за дисперсии групповых скоростей. Уширенный импульс начинает сжиматься. Оба эффекта компенсируют друг друга. В результате импульс распространяется без изменения формы, частотного спектра и длительности, т.е. без искажения.

147. Нелинейные эффекты в оптоволокне можно объяснить зависимостью показателя преломления оптоволокна от интенсивности излучения, распространяющегося по волокну, т.е. $n(I) = n_0 + n_2 I$, где n_0 – линейная часть коэффициентом преломления оптоволокна, а n_2 – нелинейная часть, равная $n_2 = \frac{3}{8n} \chi^{(3)}$. Определить оптический путь световой волны в оптоволокне длиной в 1 м из кристаллического кварца с коэффициентом поглощения $\beta = 0.05 \text{ см}^{-1}$, линейной частью коэффициентом преломления оптоволокна $n_0 = 1.49$ и нелинейной частью $n_2 = 3.5 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2/\text{Вт}$. Более высокими членами в разложении показателя преломления от интенсивности $n = n(I)$ пренебречь. Интенсивность излучения на входе в оптоволокно равна 10^{14} Вт/см^2 .

148. Какими эффектами вызвано сужение оптических импульсов при распространении по оптическому волокну?

149. Четырехволновое смешение оказывает существенное влияние на процессы, происходящие в оптоволокне. Каким способом можно уменьшить влияние четырехволнового смешения?⁵⁰

150. При распространении оптических сигналов по оптоволокну мощность, вводимая в оптоволокно, уменьшилась в 100 раз на каждые 40 км длины волокна. Каковы потери α в таком волокне?

151. На рис. 49 представлены кривые дисперсионного уширения гауссовского оптического импульса в оптоволокне при постоянном значении дисперсионного коэффициента β_2 . По какому параметру отличаются эти 3 зависимости?

⁵⁰Z.H. Tagiev, R.J. Kasumova. Theoretical studies on frequency doubling in glass optical fibers in constant-intensity approximation. *Optics & Communications*, 2006, **261**, 258-265.

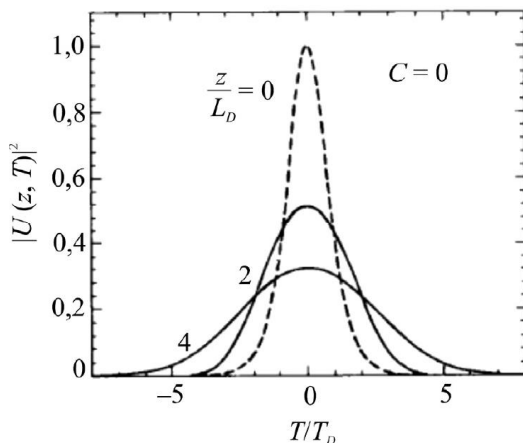


Рис. 49. Кривые дисперсионного уширения гауссовского оптического импульса в оптоволокне.

152. При распространении оптического импульса по волонку какой эффект приводит к эффекту опрокидывания волны (рис. 50)?

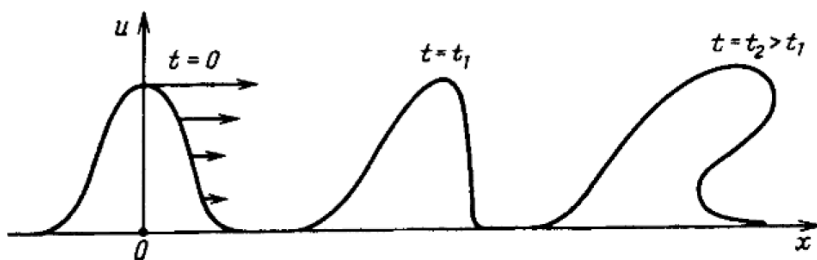


Рис. 50. Распространение волны по оптоволокну.

153. Оптический импульс, имеющий гауссовую форму $I(t) = I_0 \cdot \exp(-\frac{t}{\tau})$, где τ – полуширина импульса на полувысоте, распространяется по оптоволокну длиной L . Определить

аналитически частотный сдвиг $\delta\omega$, связанный с фазовой само-модуляцией.⁵¹

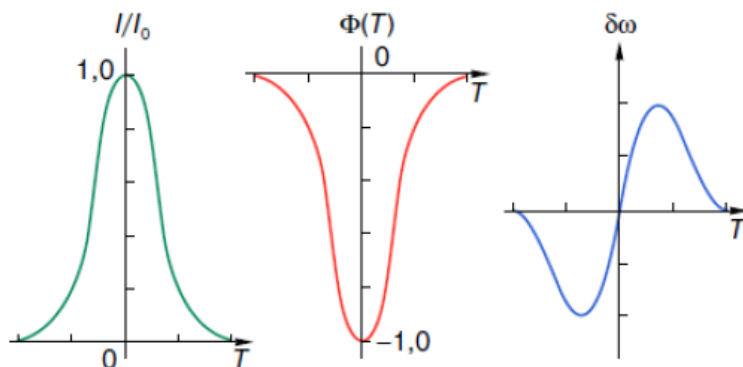


Рис. 51. Динамика изменения интенсивности импульса света $I(t)$, фазового набега и изменений частоты $\delta\omega$.

154. Рассмотрим оптический импульс, имеющий супергауссовскую форму $I(t) = I_0 \cdot \exp[(-t/\tau)^{2m}]$, где τ – полуширина импульса на полувывоте, а m – безразмерный параметр. Импульс распространяется по оптоволокну длиной L . Определить: аналитически частотный сдвиг $\delta\omega$, связанный с фазовой само-модуляцией, и время (значение параметра t/τ для фиксированной τ), когда наблюдается максимальный частотный сдвиг.

155. В оптоволокну эффект самовоздействия при ГВГ в квадратичной среде отличается от аналогичного эффекта в обычной среде. Из кривых рис. 52 видно, что изменение фазы сильнее происходит в обычной среде, чем в оптоволокну. Оценить эту разницу.⁵²

⁵¹Z.H. Tagiev, R.J. Kasumova. Theoretical studies on frequency doubling in glass optical fibers in constant-intensity approximation. *Optics & Communications*, 2006, **261**, 258-265.

⁵²Z.H. Tagiev, R.J. Kasumova. Theoretical studies on frequency doubling in glass optical fibers in constant-intensity approximation. *Optics & Communications*, 2006, **261**, 258-265.

156. Рассмотрим распространение гауссовского импульса волны накачки по квадратично нелинейной среде оптоволокна, где реальная часть амплитуды излучения волны накачки равна $a_1(t) = a_{10} \exp(-t^2/2\tau_0^2)$. В результате самомодуляции происходит уширение импульса. В ПЗИ возможно рассмотрение эффекта самомодуляции в квадратично нелинейной среде, т.е. $\delta\omega = \partial\varphi_1(z)/\partial t$. Аналитически получить выражение для частотного сдвига $\delta\omega$, определяемого эффектом самомодуляции в оптоволокне.

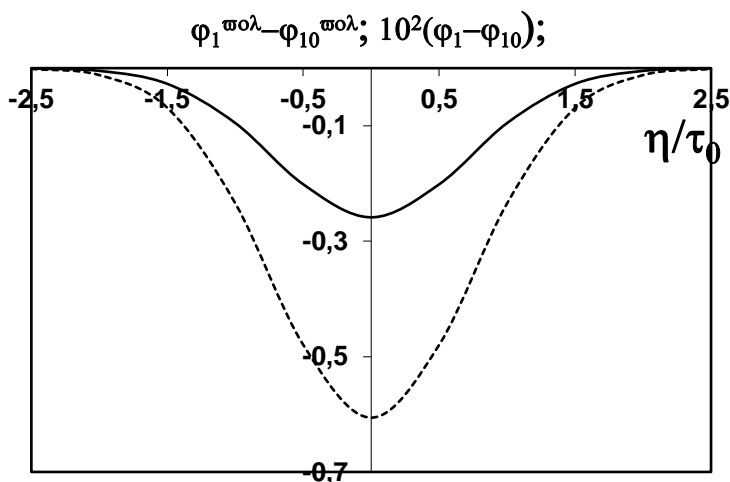


Рис. 52. Зависимости $\phi_1(z)$ в обычной среде (штриховая линия) и в оптоволокне (сплошная кривая).

Эффекты самовоздействия и перекрестного взаимодействия при ЧВ смешении

157. Рассмотрим вырожденное четырехволновое смешение в оптоволокне (рис. 53).

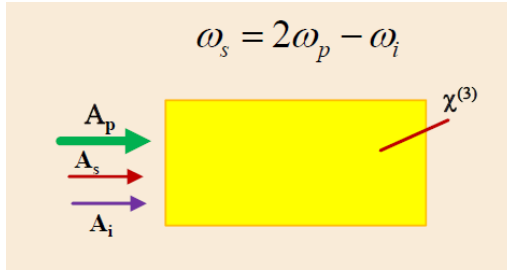


Рис. 53. Четырехволновое смешение в оптоволокне.

Анализ в ПЗИ для комплексной амплитуды сигнала четырехволнового смешения FWM на выходе волокна позволяет получить

$$A_s(z) = A_{so} e^{\sigma z} \times \left\{ \cos \lambda z + \left[\frac{2\delta_p + \delta_i - \delta_s}{2} + i \left(b - \frac{\Delta + \Delta_{SM} + \Delta_{XM}}{2} \right) \right] \frac{\sin \lambda z}{\lambda} \right\}, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{2\delta_p + \delta_i + \delta_s}{2} + \frac{i}{2} [\Delta + (2\gamma_p^p + \gamma_s^p - \gamma_i^p) I_{po} + (2\gamma_p^s - \gamma_i^s + \gamma_s^s) I_{so} + (2\gamma_p^i + \gamma_s^i - \gamma_i^i) I_{io}], \\ \lambda^2 \text{ CIA} &= \Gamma^2 - \left(\frac{2\delta_p + \delta_i - \delta_s}{2} - i \frac{\Delta + \Delta_{SM} + \Delta_{XM}}{2} \right)^2, \\ b &= \frac{\gamma_s A_{po}^2 A_{io}^*}{A_{so}}, \quad \Gamma^2 = \gamma_s \gamma_i I_{po}^2 - 2\gamma_s \gamma_p I_{po} I_{io}, \quad I_j = A_j \cdot A_j^*, \\ \Delta_{SM} &= 2\gamma_p^p I_{po} - \gamma_s^s I_{so} - \gamma_i^i I_{io}, \\ \Delta_{XM} &= (2\gamma_p^s - \gamma_i^s) I_{so} + (2\gamma_p^i - \gamma_s^i) I_{io} - (\gamma_s^p + \gamma_i^p) I_{po}. \end{aligned}$$

Здесь z обозначает продольную координату волокна, $A_{p,i,s}$ – соответствующие комплексные амплитуды электрических полей волны накачки, холостой волны (ω_i) и сигнальной волны

($\omega_s = 2\omega_p - \omega_i$). Коэффициенты линейного поглощения на соответствующих частотах ω_j в волокне даны как δ_j ($j = 1 \div 3$), а нелинейной связи волн $\gamma_{p,i,s} = 2\tilde{n}_2\omega_{p,i,s}/cA_{eff}$, где $\tilde{n}_2 = 3\chi^{(3)}/8n$ есть нелинейный, а n есть линейный показатели преломления среды, $\chi_j^{(3)}$ есть кубичная восприимчивость среды, A_{eff} обозначает эффективную площадь сердцевины волокна (is the effective area of a fiber core). Члены с γ_p^p , γ_s^s , γ_i^i ответственны за самовоздействие волн, а с γ_p^s , γ_p^i , γ_s^p , γ_s^i , γ_i^p , γ_i^s за перекрестное взаимодействие волн. Параметр $\Delta = 2k_p - k_s - k_i$ представляет линейную фазовую расстройку между взаимодействующими волнами.

Δ_{SM} определяет фазовый сдвиг, отвечающий за вклад эффектов самовоздействия, а Δ_{XM} отвечает за перекрестное взаимодействие волн.

Получить результат в ПЗП, полагая γ_p , $\gamma_p^{p,s,i}$, $\delta_p=0$.⁵³

⁵³Rena J. Kasumova. *Effects of self- and cross-phase modulations at four wave mixing in optical fiber. Journal of Russian Laser Research*, 2022, 43(2), 186-192.

ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНЫЕ СРЕДЫ

В лазерной физике анализ взаимодействия оптических волн в пространственно-неоднородных нелинейных средах не теряет своей актуальности. Это связано с тем, что основным элементом в преобразователях частоты является нелинейные кристаллы, к которым предъявляются высокие требования по однородности нелинейного материала. Подобная технологическая задача серьезно ограничивает эффективность частотного преобразователя. При выращивании и обработке нелинейных материалов возникает оптическая неоднородность из-за неоднородности состава, наличия примесей, дефектов и т.д. Это приводит к непостоянному показателю преломления n по всей длине материала. В случае оптоволокна изготовление образца происходит с градиентом показателя преломления, когда размер сердцевины и профиль показателя преломления необходимо поддерживать строго постоянными. Отметим, что дисперсия в волоконном световоде играет основную роль при распространении коротких лазерных импульсов.

Различают статическую неоднородность, когда n или направление оптической оси меняется случайным образом, и регулярную неоднородность, когда изменение показателя преломления можно описать аналитически. Оба типа неоднородности могут быть свойственны самой нелинейной среде или возникать, как результат параметрического взаимодействия, под воздействием лазерного излучения на параметр среды. Степень неоднородности n напрямую влияет на эффективность преобразователей, а также на порог параметрического усиления.

Рассмотрим нестационарный процесс ГВГ в оптоволокне с оптической неоднородностью. Изучение проведем в первом приближении теории дисперсии, т.е. без учета эффекта дисперсионного расплывания импульсов по мере распространения

волн. В этом случае укороченные уравнения, описывающие генерацию второй гармоники с учетом потерь, имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{1}{u_1} \frac{\partial A_1}{\partial t} + \delta_1 A_1 &= \\ = -i\gamma(|A_1|^2 + 2|A_2|^2)A_1 - i\beta_1 A_1^* A_2 \exp[i\Delta_0 z + i\psi(z)], \\ \frac{\partial A_2}{\partial z} + \frac{1}{u_2} \frac{\partial A_2}{\partial t} + \delta_2 A_2 &= \\ = -i\gamma(|A_2|^2 + 2|A_1|^2)A_2 - i\beta_2 A_1^2 \exp[-i\Delta_0 z - i\psi(z)]. \end{aligned}$$

Здесь $A_{1,2}$ – комплексные амплитуды волны накачки (ω_1) и второй гармоники ($\omega_2 = 2\omega_1$), $u_{1,2}$ – групповые скорости соответствующих волн, $\delta_{1,2}$ – линейные потери взаимодействующих волн, γ – коэффициенты нелинейной связи, где существенен вклад эффектов самомодуляции и перекрестной модуляции.

$$\beta_1 = \gamma_{SH}^*/2, \quad \beta_2 = \gamma_{SH}, \quad \gamma_{SH} = 3\omega_1 \varepsilon_0^2 \alpha_{SH} f_{112} \chi^{(3)} |E_p|^2 |E_{SH}|,$$

ε_0 – диэлектрическая постоянная, α_{SH} – постоянная, связанная с микроскопическими процессами, f_{112} – интеграл перекрытия, E_p – поле волны накачки, E_{SH} – затравочное поле гармоники на частоте $2\omega_p$. $\Delta k_0 = k_2 - 2k_1 - \Delta(z)$, где Δk_0 и $\Delta k(z)$ обозначают соответственно постоянную и переменную части волновой расстройки, полагаем $\psi(z) = \int_0^z \Delta(z') dz'$. В целях упрощения в дальнейшем считаем интегралы перекрытия равными, т.е. $f_{ijk} \cong f_{112} \cong 1/A_{eff}$ ($i, j, k = 1, 2, 3$) (A_{eff} – эффективная область сердцевинки волокна).

Для интенсивности ВГ в ПЗИ получаем

$$I_2(z) = |\beta_2|^2 I_{10}^2(\eta) z^2 \cdot {}_1F_1\left(\frac{1}{2} - i\frac{\Gamma^2}{\alpha}, \frac{3}{2}, -\frac{i\alpha z^2}{2}\right) \cdot {}_1F_1^*\left(\frac{1}{2} -$$

$$i \frac{\Gamma^2}{\alpha}, \frac{3}{2}, -\frac{i\alpha z^2}{2}).$$

При отсутствии неоднородности нелинейной среды, т.е. $\Delta k(z) = 0$ ($\alpha = 0$), для однородной среды получаем

$$I_2^{CIA}(z) = |\beta_2|^2 I_{10}^2(\eta) z^2 \times \\ \times \exp(-4\delta_1 z) \left\{ 1 + \frac{(\Gamma z)^4}{75} \left[2 + \frac{(\Gamma z)^4}{12} \right] \right\}$$

В случае пренебрежения эффектами самовоздействия и перекрестного взаимодействия и потерями ($\delta'_2 = 2\delta'_1 = 0$) для интенсивности ВГ в ПЗИ получаем

$$I_2(z) = |\beta_2|^2 I_{10}^2(\eta) z^2 \times \\ \times {}_1F_1\left(\frac{1}{2} - i \frac{\Gamma^2}{\alpha}, \frac{3}{2}, -\frac{i\alpha z^2}{2}\right) \cdot {}_1F_1^*\left(\frac{1}{2} - i \frac{\Gamma^2}{\alpha}, \frac{3}{2}, -\frac{i\alpha z^2}{2}\right).$$

158. Провести анализ выражения для интенсивности ВГ в неоднородной среде

$$I_2(z) = |\beta_2|^2 I_{10}^2(\eta) z^2 \times \\ \times {}_1F_1\left(\frac{1}{2} - i \frac{\Gamma^2}{\alpha}, \frac{3}{2}, -\frac{i\alpha z^2}{2}\right) \cdot {}_1F_1^*\left(\frac{1}{2} - i \frac{\Gamma^2}{\alpha}, \frac{3}{2}, -\frac{i\alpha z^2}{2}\right)$$

в двух случаях

- слабой неоднородной среды, т.е. $\alpha z^2 < 1$ и малых длин взаимодействия,
- сильно неоднородной среды, когда $\alpha z^2 > 1$.⁵⁴

⁵⁴R.J. Kasumova, Z.H. Tagiev, Sh.Sh. Amirov. *Laser pulse manipulation in optical fiber. Bakı Universitetinin Xəbərləri*, 2021, № 1, 72-82.

159. Оценить изменение длительности импульса для разных неоднородных сред. Допустим $\Gamma(0)z = 0.9$ и в слабой неоднородной среде для параметра неоднородности справедливо соотношение $|\alpha|z^2 = 0.3$, а для сильной неоднородной среды имеет место соотношение $|\alpha|z^2 = 1.5$.⁵⁵

160. Провести анализ выражения для интенсивности ВГ в отсутствие эффектов самовоздействия и перекрестного взаимодействия, т.е. когда интенсивность имеет вид

$$I_2(z) = |\beta_2|^2 I_{10}^2(\eta) z^2 \times \\ \times {}_1F_1\left(\frac{1}{2} - i\frac{\Gamma^2}{\alpha}, \frac{3}{2}, -\frac{i\alpha z^2}{2}\right) \cdot {}_1F_1^*\left(\frac{1}{2} - i\frac{\Gamma^2}{\alpha}, \frac{3}{2}, -\frac{i\alpha z^2}{2}\right)$$

двух случаях:

- слабой неоднородной среды, т.е. $\alpha z^2 < 1$ и малых длин взаимодействия,
- сильно неоднородной среды, когда $\alpha z^2 > 1$.⁵⁶

161. Проведем численный анализ выражения, полученного в ПЗИ, для интенсивности ВГ

$$I_2(z)/I_{10}(\eta) = (|\beta_2|z)^2 \cdot I_{10}(\eta) \left\{ \left[1 - \frac{1}{3}|\alpha|z^2 + \frac{1}{30}(2|\alpha|^2 z^4 - \Gamma^4 z^4) \right]^2 + \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{10}|\alpha|z^2 \right]^2 \Gamma^4 z^4 \right\} \cdot \exp(-4\delta_1 z).$$

На рис. 54 показаны результаты численного счета данного выражения для интенсивности. Рассмотрено как меняется длительность импульса в зависимости от параметров задачи.

⁵⁵R.J. Kasumova, Z.H. Tagiev, Sh.Sh. Amirov. *Laser pulse manipulation in optical fiber. Bakı Universitetinin Xəbərləri*, 2021, № 1, 72-82.

⁵⁶R.J. Kasumova, Z.H. Tagiev, Sh.Sh. Amirov. *Laser pulse manipulation in optical fiber. Bakı Universitetinin Xəbərləri*, 2021, № 1, 72-82.

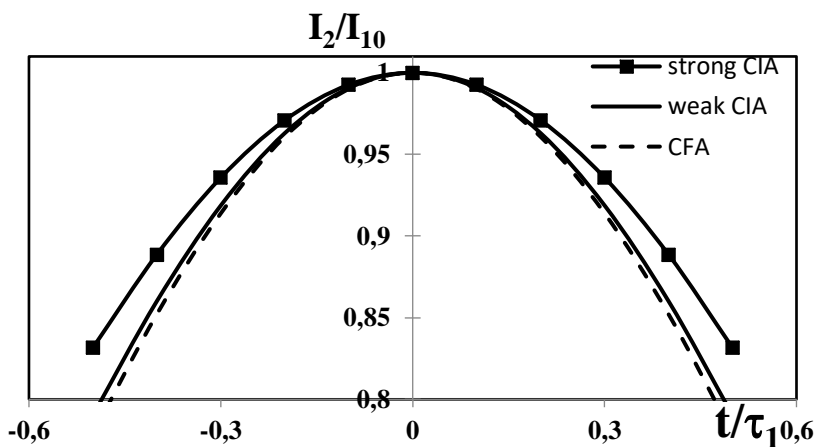


Рис. 54. Зависимость относительной интенсивности второй гармоники I_2/I_{10} от времени t/τ_1 при $|\alpha|z^2=1.5$ для случая сильной неоднородности среды, $\Gamma z = 0$ (для ПЗП), 0.9 (для ПЗИ при слабой и сильной неоднородной среде).

Объяснить поведение зависимостей, приведенных на рис. 54.

МЕТАМАТЕРИАЛЫ

Современное развитие фотоники связано, в частности, с технологией разработки метаматериалов. В оптических системах обработки информации в качестве носителя информации используются фотоны. Однако здесь встает проблема управления носителем информации. Открытие метаматериалов способствовало появлению возможности регулирования световым излучением за счет изменения оптических свойств подобных искусственных структур. Как известно, метаматериал можно создать из композитного материала, образующего диэлектрическую матрицу, с включениями, обеспечивающими резонансные свойства материала. Аналогичный подход был применен при разработке твердотельных лазеров, когда в матрицу, например, кристалла внедряли ионы активатора, которые в конечном счете определяли физические свойства лазерной среды. В результате в подобной неоднородной среде метаматериала наблюдаются скачкообразные изменения материальных параметров среды (диэлектрической ϵ и магнитной проницаемостей μ) и отрицательное значение показателя преломления в определенном частотном диапазоне. И, как следствие, в такой среде электромагнитная волна на частоте отрицательного преломления распространяется с разнонаправленными фазовой и групповой скоростями. Отсюда в метаматериале падающая электромагнитная волна претерпевает необычные изменения, что приводит к новым нетрадиционным эффектам.

Метаматериалы привлекают внимание исследователей из-за своих необычных оптических свойств и интересных приложений. Резонансные взаимодействия, существование обратных волн, отрицательная рефракция в хронологическом порядке были рассмотрены в работах Г. Лэмба, Л.И. Мандельштама, Д.В. Сивухина, В.Н. Аграновича и В.Л. Гинзбурга, В.Г. Веселаго и др.

Природные материалы с отрицательной диэлектрической проницаемостью хорошо известны – это любой металл при частотах выше плазменной частоты (при которой металл становится прозрачным). В этом случае отрицательный отклик на электрическую компоненту электромагнитного поля $\varepsilon < 0$ достигается за счет того, что свободные электроны в металле экранируют внешнее электромагнитное поле. Гораздо сложнее создать материал с отрицательным откликом на магнитную компоненту $\mu < 0$, в природе такие материалы не существуют. Именно по этой причине работы Веселаго долгое время не привлекали должного внимания научной общественности. Прошло 30 лет, прежде чем английский ученый Д. Пендри (John Pendry) в 1999 г. показал, что отрицательная магнитная проницаемость может быть получена для проводящего кольца с зазором. Если поместить такое кольцо в переменное магнитное поле, в кольце возникнет электрический ток, а на месте зазора возникнет дуговой разряд. Поскольку металлическому кольцу можно приписать индуктивность L , а зазору соответствует эффективная емкость C , систему можно рассматривать как простейший колебательный контур с резонансной частотой $\omega_0 \sim 1/(LC)^{-1/2}$ (рис. 55).

Нелинейная оптика метаматериалов интенсивно исследуется благодаря развитию технологии их производства. В настоящее время подобные инженерные материалы уже разработаны в оптическом диапазоне. В метаматериалах изучены ряд нелинейных эффектов в том числе генерация гармоник, параметрическое взаимодействие при встречной геометрии распространения взаимодействующих волн, эффекты самофокусировки и т.д.

Основной проблемой при разработке метаматериалов было и остается наличие больших потерь. В метаматериале основные эффекты проявляются вблизи частотного резонанса, где ε и μ одновременно отрицательны. В классической элек-

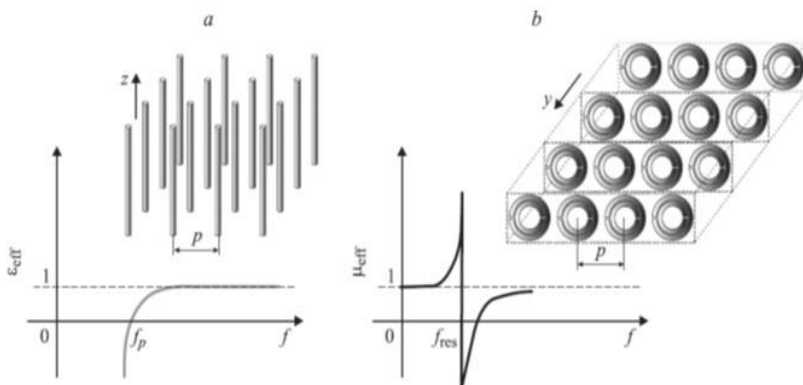
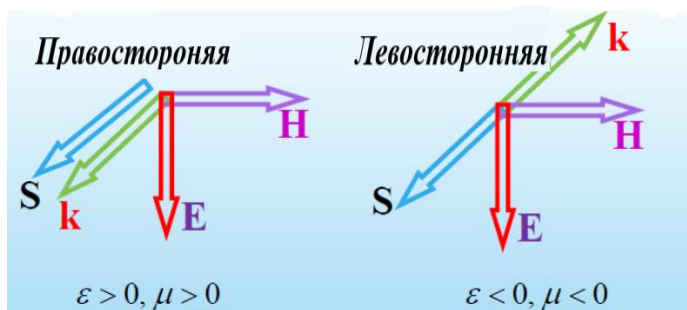


Рис. 55. Поведение ϵ и μ в зависимости от частоты внешнего поля



$$\left. \begin{aligned} [kE] &= \frac{\omega}{c} \mu H \\ [kH] &= -\frac{\omega}{c} \epsilon E \end{aligned} \right\} \quad S = \frac{c}{4\pi} [EH]$$

Рис. 56. Метаматериал. Векторы электродинамики.

тродинамике, согласно дисперсионным соотношениям Крамера – Кронига, определяющим поведение оптической постоянной среды – действительной (показатель преломления) и мнимой (коэффициент поглощения) частей электрической

проницаемости от частоты, на резонансной частоте коэффициент поглощения резко возрастает, что ведет к значительным потерям энергии электромагнитной волны. Таким образом, в метаматериалах существуют неизбежные потери, которые ослабляют электромагнитную волну. Метаматериалы, содержащие металлические конструктивные элементы (провода, колечки), поглощают световую энергию и рассеивают её в виде тепла.

В настоящее время ведутся интенсивные исследования с целью компенсации потерь в метаматериалах. Предлагается внедрить в метаматериал полупроводник, в котором происходит усиление ослабленного из-за потерь сигнала. Разработан метаматериал, который в ИК диапазоне спектра в зависимости от поляризации падающего излучения поглощает или переизлучает свет. Кроме того, ведутся исследования электромагнитного поля вокруг локализованных плазмонов, которые аккумулируют вокруг себя большие электрические поля, что позволяет уменьшить потери в подобных структурах.

В случае генерации оптической гармоники в метаматериале максимум интенсивности гармоники достигается не на выходе, а на входе в нелинейную среду. В этом случае метаматериал играет роль нелинейного зеркала, как и в случае вырожденного четырехволнового взаимодействия при наблюдении эффекта обращения волнового фронта лазерного излучения. К настоящему времени, благодаря совершенствованию технологии изготовления метаматериалов, их разработка из радиодиапазона перемещается в сторону видимого диапазона. Докладывается о результатах разработок уже в ближнем ИК и в видимом диапазонах спектра.

В процессе распространения волн в нелинейной среде в результате нелинейного взаимодействия происходит энергообмен между встречными волновыми пакетами двух типов волн: прямых волн (волны накачки и холостой волны) и обратной волны (сигнальной волны). В результате чего имеет место

перекачка энергии волны накачки и холостой волны в энергию сигнальной волны. Эффективность данного процесса зависит от фазового соотношения между взаимодействующими волнами. При выборе метаматериала следует учесть, что одним из основных условий для эффективного частотного преобразования при трехволновом взаимодействии в метаматериале является наличие высокой квадратичной нелинейности материала на рабочих частотах.

Четырехволновое взаимодействие в среде с отрицательным показателем преломления было экспериментально реализовано в слоистой наноструктуре металл-диэлектрик-металл. Если в металлическом слое из золота толщиной 20 нм эффективность генерации при четырехволновом смешении составила 10^{-8} , то в слоистой структуре металл-диэлектрик-металл получена рекордная эффективность преобразования 10^{-6} . Как известно, при вырожденном четырехволновом взаимодействии наблюдается эффект обращения волнового фронта лазерного излучения, когда среда играет роль нелинейного зеркала. Аналогично ведет себя нелинейная среда в случае генерации гармоники в метаматериале, когда максимум интенсивности гармоники достигается не на выходе, а на входе в нелинейную среду волны накачки. Подобный результат объясняется встречной геометрией в метаматериале волны накачки и гармоники, когда перенос энергии волны, для которой среда является «левой», происходит в направлении противоположном ее фазовой скорости. Геометрия встречного взаимодействия нелинейных оптических волн, наблюдаемая в метаматериалах, встречается при параметрическом взаимодействии в традиционных нелинейных средах.

В сильных лазерных полях процесс преобразования частоты сопровождается эффектами само- и кросс-взаимодействия, связанными с кубичной нелинейностью среды. Распространение интенсивной световой волны в нелинейной среде приводит (из-за нелинейности среды) к взаимодействию

между волной накачки и гармоникой, возникающему из-за того, что эффективный показатель преломления волны накачки зависит не только от интенсивности самой этой волны (эффект самовоздействия), но и от интенсивности второй волны (гармоники), распространяющейся одновременно вместе с ней в нелинейной среде (перекрестное взаимодействие). Эффекты самовоздействия и перекрестного взаимодействия также приводят к изменению фазовых соотношений между волнами, невыполнению оптимального фазового условия. Фазовая кросс модуляция всегда сопровождается фазовой самомодуляцией. Эффект самовоздействия приводит к изменению пространственного распределения лазерного пучка, вследствие разных величин интенсивности лазерного излучения на оси и на краях пучка. Как результат спектр излучения уширяется. Эффекты кросс взаимодействия могут быть использованы для коллапса волны накачки в метаматериалах с керровской самофокусировкой.

Стационарный режим генерации. Генерация гармоник. Параметрическое взаимодействие

162. Принять, что в метаматериале выполняются следующие соотношения: $\varepsilon_{\omega} < 0$, $\mu_{\omega} < 0$, $\varepsilon_{2\omega} > 0$, $\mu_{2\omega} > 0$. Полагая слева на метаматериал падает вектор потока энергии волны накачки \vec{S}_1 , который распространяется вдоль положительного направления оси z . Известно, что метаматериал играет роль зеркала, отражающего вторую гармонику на вход в метаматериал, в отличие от обычной среды, где интенсивность гармоники увеличивается на выходе среды. На рис. 57 приведены зависимости, отражающие этот факт. Объяснить, почему в метаматериалах наблюдается подобное встречное направление распространения взаимодействующих волн?*

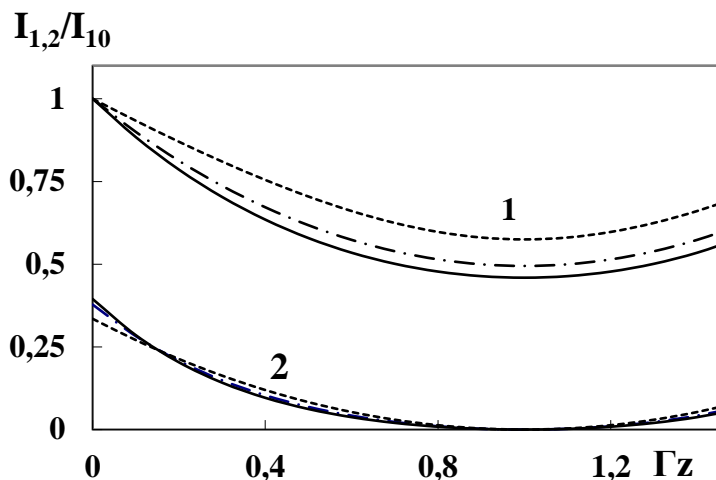


Рис. 57. Зависимость интенсивностей второй гармоники (кривая 2) и основного излучения (кривая 1) от длины среды, рассчитанные в ПЗИ.

163. Рассмотрим метаматериалы, характеризующиеся одновременно отрицательными значениями как диэлектрической, так и магнитной проницаемости ($\epsilon_1 < 0$, $\mu_1 < 0$) на частоте накачки и положительными значениями диэлектрической и магнитной проницаемостей ($\epsilon_3 > 0$, $\mu_3 > 0$) на частоте гармоники $\omega_3 = 3\omega_1$. Будем считать, что волна накачки (с потоком излучения накачки) падает нормально на правую боковую поверхность метаматериала длиной L и распространяется в отрицательном направлении оси z . Известно, что условия коллинеарного фазового синхронизма определяют направления волновых векторов $k_{1,3}$. Следовательно, при таком условии в метаматериалах волновые векторы волны накачки и гармоники $k_{1,3}$ и вектор потока энергии гармоники S_3 направлены вдоль положительной оси z . Эти три вектора противоположны вектору Пойнтинга S_1 . Таким образом, вектор Пойнтинга волны накачки S_1 направлен навстречу S_3 . При этих условиях

в ПЗИ для эффективности преобразования в третью гармонику получаем при $\Gamma^2 > \frac{\Delta k^2}{12}$

$$\eta_3(z) = \frac{I_3(z)}{I_{1l}} = \gamma_3^2 I_{1l}^2 \frac{\sinh^2 \lambda z}{3\Gamma^2 \cosh^2 \lambda l - \frac{\Delta k^2}{4}},$$

где

$$\lambda^2 = 3\Gamma^2 - \frac{\Delta k^2}{4}, \Gamma^2 = \gamma_1 \gamma_3 I_{1l}^2, \Delta k = k_3 - 3k_1.$$

Найти выражение для оптимальной фазовой расстройки Δk_{opt} .⁵⁷

164. Рассмотреть эффект самовоздействия в метаматериале в процессе генерации третьей гармоники, полагая $A_j(z) = a_j(z) \exp[i\varphi_j(z)]$, где $j = 1, 3$. Полагаем, что среда “левая” на частоте волны накачки. Вывести соотношение для изменений фазы основной волны накачки $\varphi_1(z)$.⁵⁸

165. Рассмотрим параметрическое трехволновое взаимодействие в метаматериале, где среда является «левой» только на частоте сигнальной волны (ω_1). Другими словами, исследуем случай отрицательных значений диэлектрической и магнитной проницаемостей на частоте сигнальной волны ω_1 и положительных значений диэлектрической и магнитной прони-

⁵⁷Rena J. Kasumova, G.A. Safarova, Sh.A., Shamilova, N.V. Kerimova. Phase effects in metamaterials at Third-Harmonic Generation. International Journal of Engineering and Technology IJET-IJENS, 2015, **15**(6) 19-30.

⁵⁸Rena J. Kasumova, G.A. Safarova, Sh.A., Shamilova, N.V. Kerimova. Phase effects in metamaterials at Third-Harmonic Generation. International Journal of Engineering and Technology IJET-IJENS, 2015, **15**(6) 19-30.

цаемостей на частотах ω_2, ω_3 . Исследуем случай низкочастотной накачки на частоте ω_3 , когда $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$. Считаем, что потоки энергии холостой волны и волны накачки $S_{2,3}$ падают нормально на левую боковую поверхность метаматериала длины l и распространяются вдоль положительного направления z оси. Отсюда перенос энергии сигнальной волны, для которой среда является «левой», происходит в противоположном направлении.

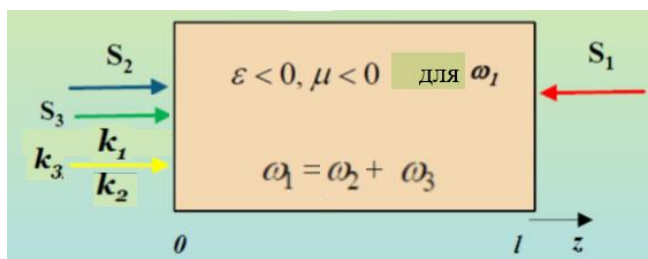


Рис. 58. При НЧ накачке вектора Пойнтинга и волновые вектора для рассматриваемого случая.

Таким образом, рассматриваемые пять векторов (т.е. три волновых вектора $k_{1,2,3}$ и два вектора Пойнтинга $S_{2,3}$) волн противоположны вектору S_1 сигнальной волны, которая является обратной волной по отношению к двум остальным взаимодействующим волнам. В результате анализа в ПЗИ получается следующие зависимости коэффициента усиления сигнальной волны от полной длины метаматериала, отличающиеся разными значениями фазовых расстройек Δk (см. рис. 59).

Почему в отличие от обычной среды в случае метаматериала важна полная длина метаматериала?⁵⁹

⁵⁹Rena J. Kasumova, Sh.Sh. Amirov, Sh.A. Shamilova. Parametric interaction of optical waves in metamaterials under low-frequency pump. *Quantum Electronics*, 2017, **47**(7) 655-660.

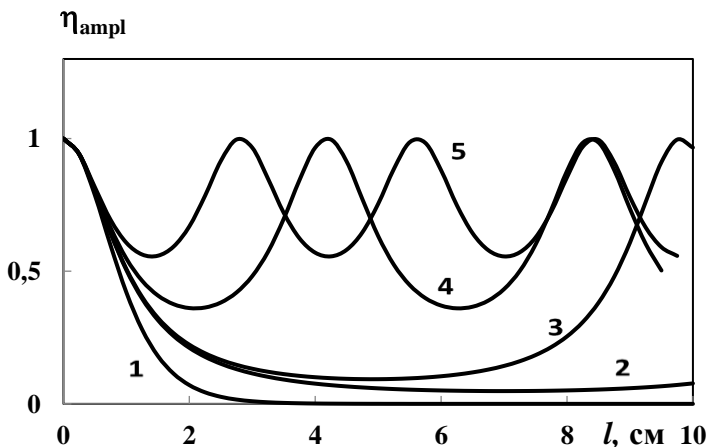


Рис. 59. Зависимости коэффициента усиления сигнальной волны, $\eta_{ampl} = I_1(z)/I_{1\ell}$, от полной длины метаматериала, ℓ , для $I_{20} = 0$ и $\Gamma_3 = 1 \text{ см}^{-1}$ при $\Delta k = 0$ (кривая 1), 2.05 см^{-1} (кривая 2), 2.1 см^{-1} (кривая 3), 2.5 см^{-1} (кривая 4) и 3 см^{-1} (кривая 5).

166. Рассмотрим метаматериал длины $\ell = 2 \text{ см}$, который накачивается лазерным излучением в единицы ватт, фазовую расстройку определим значениями в интервале $\Delta k = 5 \text{ см}^{-1} - 6 \text{ см}^{-1}$, полагая значения коэффициентов нелинейной связи $\gamma_{1,2} \approx 1 \text{ см}^{-1} \text{ Вт}^{-1/2}$, а входную интенсивность сигнальной волны $I_{20}/I_{30} = 0.1$. При низкочастотной накачке при параметрическом преобразовании в метаматериале рассчитать эффективность преобразования в сигнальную волну $\eta_1(z)$, используя следующее выражение, полученное в ПЗИ

$$\eta_1(z=0) = \frac{\Gamma_3^2 \sin^2 \lambda \ell}{\lambda^2 \cos^2 \lambda \ell + \frac{\Delta k^2}{4} \sin^2 \lambda \ell},$$

где

$$\lambda = \sqrt{\frac{\Delta k^2}{4} - \Gamma_3^2 - \Gamma_2^2}, \Gamma_3^2 = \gamma_1 \gamma_2 I_{30},$$

$$\Gamma_2^2 = \gamma_1 \gamma_3 I_{20}, I_j = A_j \cdot A_j^*.$$
⁶⁰

167. Исследуем случай высокочастотной накачки на частоте ω_3 при параметрическом взаимодействии, т.е. $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ и считаем, что среда является «левой» только на частоте сигнальной волны (ω_1).

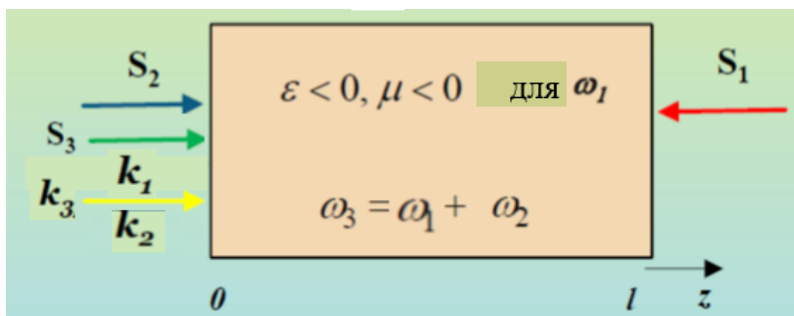


Рис. 60. При ВЧ накачке вектора Пойнтинга и волновые вектора для рассматриваемого случая.

В результате анализа процесса в ПЗИ получают следующие зависимости, приведенные на рис. 61.

Объяснить почему эффективность, рассчитанная в ПЗП выше, чем эффективность в ПЗИ.⁶¹

⁶⁰Rena J. Kasumova, Sh.Sh. Amirov, Sh.A. Shamilova. Parametric interaction of optical waves in metamaterials under low-frequency pump. *Quantum Electronics*, 2017, **47**(7) 655-660.

⁶¹Rena J. Kasumova, Z.H.Tagiyev, Sh.Sh. Amirov, Sh.A. Shamilova, G.A. Safarova. Phase effects of parametric interaction in metamaterials. *Journal of Russian Laser Research*, 2017, **38**(4) 211-218.

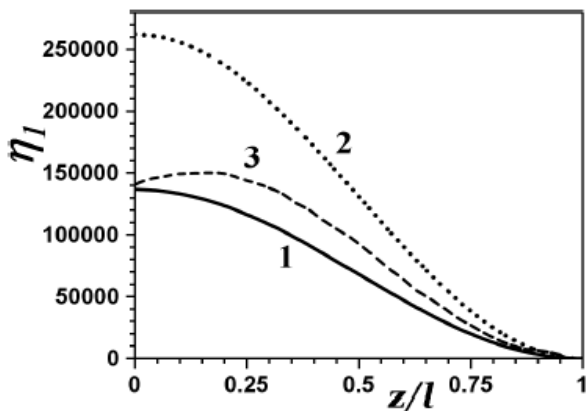


Рис. 61. Зависимость эффективности преобразования в сигнальную волну, $\eta_1 = I_1(z)/I_{20}$, от приведенной длины метаматериала z/l для $\Delta k = 0$, $I_{1\ell}/I_{20} = 0.1$ при $\Gamma_3\ell = 1.57$ (сплошная 1), 1.57009 (сплошная кривая 2) и 1.82 (точечная кривая 3). Здесь кривые 1 и 2 вычислены в ПЗИ, а кривая 3 – в ПЗП.

168. В квазистатическом приближении рассмотрим нелинейный процесс третьего порядка, связывающий четыре волны на частотах ω_j ($j = 1 \div 4$), из которых две сильные волны накачки (на частотах ω_3 и ω_4). Полагаем, что происходит параметрическое четырехволновое взаимодействие встречных волн в кубичной среде. Считаем, что среда является «левой» только на частоте сигнальной волны ω_1 , т.е. среда метаматериала имеет одновременно отрицательные значения диэлектрической проницаемости ε_j и магнитной проницаемостей μ_j на частоте ω_1 ($\varepsilon_1 < 0$, $\mu_1 < 0$) и положительные значения диэлектрической и магнитной проницаемостей на частотах $\omega_{2,3,4}$ ($\varepsilon_{2,3,4} > 0$, $\mu_{2,3,4} > 0$).

Полагаем, что потоки энергии волны на частоте ω_2 и двух волн накачек ($\vec{S}_{2,3,4}$) падают нормально на левую боковую поверхность метаматериала толщины ℓ и распространяются вдоль

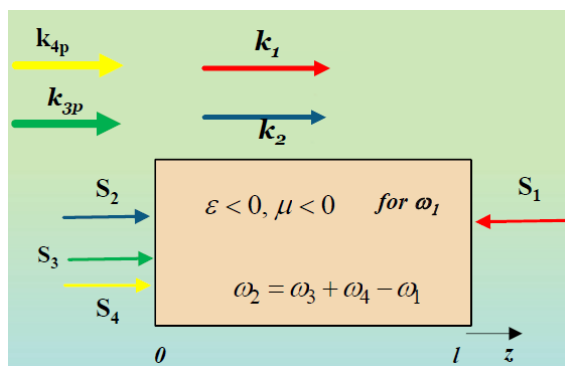


Рис. 62. Геометрия взаимодействия ВЧВ в метаматериале.

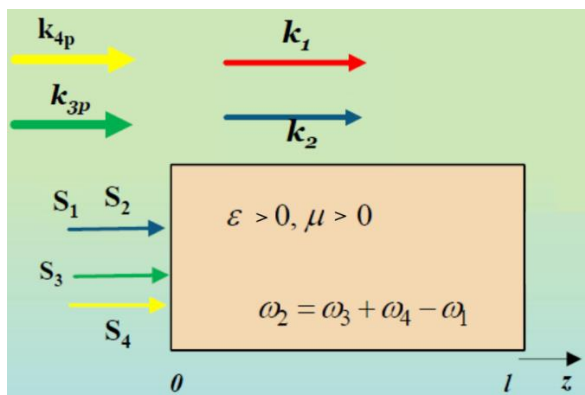


Рис. 63. Геометрия взаимодействия ВЧВ в обычной среде.

положительного направления z оси. Отсюда перенос энергии сигнальной волны, для которой среда является «левой», происходит в противоположном направлении. Указать, как расположены волновые векторы всех четырех волн $\vec{k}_{1,2,3,4}$ и векторы Пойнтинга $\vec{S}_{1,2,3,4}$? Составить граничные условия для рассматриваемой геометрии в метаматериале.⁶²

⁶²Rena J, Kasumova, G.A. Safarova, Sh.Sh. Amirov, A.R. Ahmadova. Four-wave mixing in metamaterials. Russian Physics Journal, 2018, 61(9) 1559-1567)

169. Считаем, что среда является «левой» только на частоте сигнальной волны ω_1 , т.е. среда метаматериала имеет одновременно отрицательные значения диэлектрической проницаемости ε_j и магнитной проницаемостей μ_j на частоте ω_1 ($\varepsilon_1 < 0$, $\mu_1 < 0$). Полагаем, что происходит параметрическое четырехволновое взаимодействие встречных волн (рис. 74). После однократного прохода нелинейной среды в результате параметрического взаимодействия волн возможно добиться постоянства амплитуды сигнальной волны бегущими волнами при выполнении определенного порогового условия для параметров задачи. Из условия равенства начального значения комплексной амплитуды сигнальной волны на входе в среду справа $A_1(z = l) = A_{1l}$ и конечного значения на выходе из среды слева $A_1(z = 0)$, получаем следующее пороговое условие параметрической генерации

$$A_1(z = 0) \geq A_1(z = l) = A_{1l}.$$

Знак неравенства предполагает, что в процессе нелинейного взаимодействия волн помимо постоянства амплитуды обратной сигнальной волны возможно и ее усиление. В ПЗИ для пороговой интенсивности накачки получаем

$$I_{po}^{thresh} = \frac{\gamma_3 + \gamma_4}{2\gamma_2} I_{20} + \sqrt{\left(\frac{\gamma_3 + \gamma_4}{2\gamma_2} I_{20}\right)^2 + \frac{\delta_1^2}{\gamma_1\gamma_2}}.$$

Величина I_{po}^{thresh} увеличивается с повышением уровня входной интенсивности холостой волны I_{20} . Помимо этого, на пороговую амплитуду накачки влияет фактор, учитывающий обратное воздействие возбуждаемых волн на фазу волны накачки ($\gamma_{3,4} \neq 0$). Чем больше коэффициенты нелинейной связи $\gamma_{3,4}$, тем выше этот фактор и тем больше величина пороговой амплитуды накачки I_{po}^{thresh} . Получить аналитический

результат для пороговой интенсивности накачки I_{po}^{thresh} в ПЗП.⁶³

170. Рассмотрим параметрическое трехволновое взаимодействие в метаматериале на частоте ω_3 . Полагаем, что среда является «левой» только для волны на разностной частоте ω_2 , $\omega_2 = \omega_1 - \omega_3$. Считаем, что потоки энергии волны на суммарной частоте ω_1 и волны накачки $S_{1,3}$ падают нормально на левую боковую поверхность метаматериала длины l и распространяются вдоль положительного направления z оси. Отсюда перенос энергии волны на разностной частоте ω_2 , для которой среда является «левой», происходит в противоположном направлении. В результате анализа в ПЗИ для коэффициента усиления обратной волны на разностной частоте получаем

$$\eta_{meta}^{ampl} = \frac{I_2(z=0)}{I_{2l}} = \frac{\exp[(\delta_1 + \delta_3 - \delta_2)l] + \frac{\gamma_2^2 I_{10} I_{30}^*}{I_{2l}} \left(\frac{\sinh \lambda l}{\lambda}\right)^2}{\left[\cosh \lambda l + \frac{(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3)}{2} \frac{\sinh \lambda l}{\lambda}\right]^2}.$$

Для сравнения в случае обычной среды при той же геометрии волн, а именно при падении всех трех волн слева на среду, для коэффициента усиления в приближении заданной интенсивности можно получить

$$\eta_{ordinary}^{ampl} = \frac{I_2(z=l)}{I_{20}} = \exp[-(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3)l] \times \left\{ \left[\cos \lambda l + \frac{(\delta_2 - \delta_1 - \delta_3)l}{2} \operatorname{sinc} \lambda l \right]^2 + \frac{\gamma_2^2 I_{10} I_{30}^*}{I_{2l}} l^2 \operatorname{sinc}^2 \lambda l \right\}$$

⁶³Rena J, Kasumova. Four wave mixing and compensating losses in metamaterials. *Superlattices and Microstructures*, 2018, **121**, 86-91

Провести анализ коэффициента усиления для этих двух выражений.⁶⁴

171. Рассмотрим стационарную генерацию второй гармоники в метаматериалах с квадратичной и кубической нелинейностью (рис. 64).

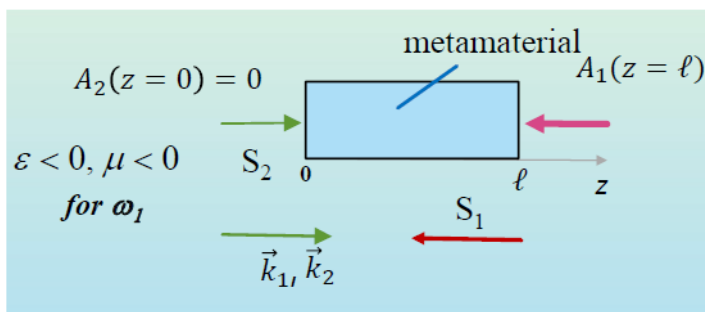


Рис. 64. Стационарная генерация ВГ в метаматериалах с одновременной квадратичной и кубической нелинейностью.

В этом случае укороченные уравнения трансформируются к следующему виду

$$\begin{aligned}\frac{dA_1}{dz} &= i|\gamma_1|A_1^*A_2 \exp(-i\Delta kz) + i(|\gamma_{11}| \cdot |A_1|^2 + |\gamma_{12}| \cdot |A_2|^2)A_1, \\ \frac{dA_2}{dz} &= -i\gamma_2A_1^2 \exp(i\Delta kz) - i(\gamma_{21}|A_1|^2 + \gamma_{22}|A_2|^2)A_2.\end{aligned}$$

Здесь $A_{1,2}$ – комплексные амплитуды волны накачки и второй гармоники на частотах ω_1 и ω_2 ($\omega_2 = 2\omega_1$) соответственно, $\gamma_{1,2}$ – коэффициенты нелинейной связи волн в метаматериале на частотах $\omega_{1,2}$ соответственно, ($\gamma_1 = -|\gamma_1|$), $\Delta k = k_2 - 2k_1$ –

⁶⁴Rena J. Kasumova, N.V. Kerimli, A.R. Ahmadova, G.A. Safarova. Compensation of losses at three-wave parametric interaction in metamaterials. Baki Universitetinin Xəbərləri, 2020, № 3, səh. 42-51

линейная фазовая расстройка, γ_{nj} $n, j = 1, 2$. Указать в уравнениях члены, ответственные за самовоздействие и перекрестное взаимодействие волн.⁶⁵

Нестационарный режим генерации

Отличительной особенностью лазерных импульсов является способность концентрировать большую энергию в чрезвычайно малых спектральных, временных и пространственных интервалах, рекордная интенсивность в фокусе лазерного луча составляет $\sim 10^{21} \div 10^{22}$ Вт/см². Это позволяет по-новому взглянуть на процессы взаимодействия лазерного излучения со средой. В частности, при таких интенсивных световых полях накачки оптическое удвоение частоты в нецентросимметричных средах сопровождается процессами, связанными как с квадратичной, так и с кубической нелинейностями среды. В этом случае процесс преобразования частоты в нелинейной среде сопровождается эффектами само- и кросс-взаимодействия. Распространение интенсивной световой волны в нелинейной среде приводит (из-за нелинейности среды) к взаимодействию между волной накачки и гармоникой, возникающему из-за того, что эффективный показатель преломления волны накачки зависит не только от интенсивности самой этой волны (эффект самовоздействия), но и от интенсивности второй волны (гармоники), распространяющейся одновременно вместе с ней в нелинейной среде (перекрестное взаимодействие). Эффект самовоздействия приводит к изменению пространственного распределения лазерного пучка, в результате спектр излучения уширяется. Эффекты кросс взаимодействия могут быть использованы для коллапса для коллапса волны

⁶⁵Rena J, Kasumova, G.A. Safarova, A.R. Ahmadova, N.V. Kerimova. Influence of self- and cross-phase modulations on optical frequency doubling process for metamaterials. *Appl Opt*, 2018, **57**(25), 7385-7390.

накачки в метаматериалах с керровской самофокусировкой.

В этой связи исследование оптического удвоения частоты мощного лазерного излучения в метаматериалах представляет несомненный интерес, тем более при реализуемой здесь отличной геометрии взаимодействия волн, а именно в случае встречного взаимодействия нелинейных волн.

Метаматериал играет роль распределенной обратной связи (distributed feedback). При этом энергия для обратной волны передается в направлении противоположном ее волновому вектору. При этом необходимо учитывать наличие частотной дисперсии групповых и фазовых скоростей взаимодействующих волн. В обычной среде по мере распространения в среде обыкновенных и необыкновенных волн различие групповых скоростей ведет к пространственному смещению волн друг относительно друга. Это может привести к полному отсутствию взаимодействия между волнами. В метаматериале в какой-то момент происходит пространственное совмещение встречных волновых пакетов, что является условием эффективного взаимодействия волн. В последующий моменты времени импульсы расходятся и распространяются независимо друг от друга, т.е. не взаимодействуют. Данное перекрытие может произойти в различных областях метаматериала и в различные моменты времени, что будет определяться групповой скоростью. С другой стороны световой импульс – это немонахроматический сигнал, характеризующийся частотным спектром. По мере распространения импульса волны в диспергирующей среде из-за разных фазовых скоростей частотных составляющих импульса волны происходит деформация светового импульса, так называемое дисперсионное расплывание. Отсюда эффекты расстройки групповых и фазовых скоростей в NIM могут существенно влиять на динамику процессов взаимодействия в подобных материалах.

В метаматериале фазовые скорости взаимодействующих

волн одинаково направлены в отличие от групповых скоростей. Однако в диспергирующих средах различие скоростей частотных составляющих импульса приводит к нестационарному эффекту искажения формы импульса. Особенно это сильно проявляется для сверхкоротких импульсов и существенно в фемтосекундном диапазоне длительностей. Из сказанного следует что при исследовании нелинейного параметрического взаимодействия сверхкоротких импульсных волн в метаматериале интересно провести одновременное рассмотрение дисперсии фазовых скоростей, а также групповой расстройки волновых скоростей встречных волн.

Таким образом, отметим следующие факты:

- Дисперсия групповых скоростей – зависимость групповых скоростей от частоты приводит к эффекту смещения импульса ВГ относительно импульса волны накачки, т.е. к эффекту группового запаздывания, что ведет к уменьшению эффективности преобразования.

- Эффект дисперсионного расплывания импульса – разные частотные компоненты оптического импульса перемещаются с разными скоростями происходит расплывание импульса.

- Изучение нелинейного взаимодействия волн в первом приближении теории дисперсии проводится с учетом эффекта группового запаздывания из-за расстройки групповых скоростей (в системе учитываются только члены с первой производной по времени), а во втором приближении теории дисперсии одновременно рассматриваются эффекты как группового запаздывания, так и дисперсионного расплывания из-за дисперсии фазовых скоростей, когда в укороченных уравнениях учитываются члены с первой и второй производными по времени.

172. Исследуем генерацию второй гармоники в метаматериале с квадратичной и кубической нелинейностями (ооо скалярный синхронизм). Считаем, что среда является «левой» только на частоте волны накачки ω_1 , т.е. обладает одновременно отрицательными значениями диэлектрической проницаемости и магнитной проницаемости на частоте накачки ω_1 ($\varepsilon_1 < 0$, $\mu_1 < 0$) и положительными значениями диэлектрической проницаемости и магнитной проницаемости на частоте гармоники ($\varepsilon_2 > 0$, $\mu_2 > 0$). Отсюда поток энергии волны накачки S_1 и перенос энергии волны гармоники происходят в противоположных направлениях, т.е. имеет место встречное взаимодействие волн. Изучение проведем в первом приближении теории дисперсии, т.е. без учета эффекта дисперсионного распыливания импульсов по мере распространения волн в метаматериале и в отсутствие потерь. Для спектра волны второй гармоники получаем: $|\Phi_2(z, \Omega)|^2 = \frac{(\gamma_2 A_{1l}^2 \tau_1 z)^2}{8\pi} e^{-\frac{\Omega^2 \tau_1^2}{4}} \text{sinc}^2 \frac{(v\Omega + \Delta k + \Delta k^{NL})}{2} z$, где $\Phi_2(z, \Omega)$ – амплитуда спектра второй гармоники, τ_1 – длительность гауссовского импульса основного излучения $A_1(z = l, t) = A_{1l} \exp(-\frac{t^2}{\tau_1^2})$ на входе в среду, где $v = u_2^{-1} + |u_1|^{-1}$ – соотношение для групповых скоростей в материале с отрицательным преломлением на частоте ω_1 , $\Omega = \omega - \omega_2$ – частотная расстройка от центральной частоты спектра второй гармоники, ω – текущая частота спектра второй гармоники, $\Delta k^{NL} = (\gamma_{21} - 2|\gamma_{11}|)I_{1l}$ – нелинейная фазовая расстройка, зависящая от интенсивности основного излучения и кубической нелинейности среды (γ_{11} и γ_{21}). Определить максимум спектра второй гармоники.⁶⁶

⁶⁶Rena J. Kasumova, G.A. Safarova, A.R. Ahmadova. The spectrum of the second-harmonic of a powerful laser pulse with account of cubic nonlinearity in metamaterials. Opt. Comm., 2018, **427**, 584-588.

173. Рассмотрим трехволновое параметрическое взаимодействие лазерных импульсов в метаматериале (рис. 65).

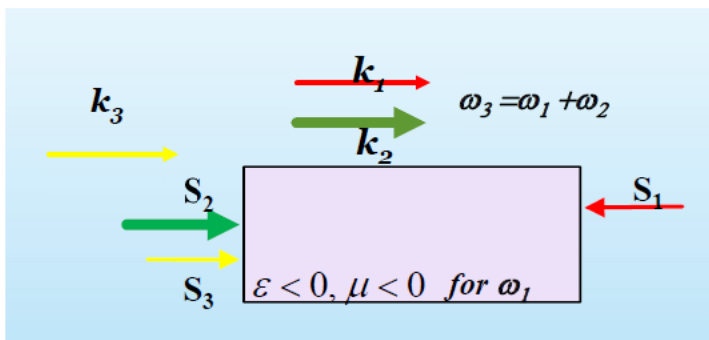


Рис. 65. Параметрическое трехволновое взаимодействие сверхкоротких импульсных волн.

В этом случае обычные укороченные уравнения для волны накачки, сигнальной и холостой волн принимают вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{|u_1|} \frac{\partial}{\partial t} - i \frac{g_1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \delta_1 \right) A_1 &= i \gamma_1 A_3 A_2^* e^{i \Delta k z}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{u_2} \frac{\partial}{\partial t} - i \frac{g_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \delta_2 \right) A_2 &= -i \gamma_2 A_3 A_1^* e^{i \Delta k z}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{u_3} \frac{\partial}{\partial t} - i \frac{g_3}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \delta_3 \right) A_3 &= -i \gamma_3 A_1 A_2 e^{-i \Delta k z}. \end{aligned}$$

Здесь $A_{1,2,3}$ – комплексные амплитуды сигнальной волны (ω_1), сильной волны накачки (ω_2) и холостой волны (ω_3), $u_{1,2,3}$ – групповые скорости соответствующих волн, $g_{1,2,3} = \partial^2 k(\omega_{1,2,3}) / \partial \omega_{1,2,3}^2$, $\delta_{1,2,3}$ – потери взаимодействующих волн, $\gamma_{1,2,3}$ – коэффициенты нелинейной связи волн в квадратичной среде на соответствующих частотах, $\gamma_j = 8\pi \chi_{eff}^{(2)} \omega_j^2 \varepsilon_j / k_j c^2$. $\Delta k = k_3 - k_2 - k_1$ фазовая отстройка от центральной частоты

волны накачки.

Какие члены в приведенной системе уравнений ответственны за дисперсию фазовых скоростей, что ведет к дисперсионному расплыванию импульсов, а какие члены учитывают групповую расстройку волновых скоростей, что приводит к эффект группового запаздывания?⁶⁷

174. Рассматривается четырехволновой нелинейный процесс третьего порядка, связывающий четыре волны на частотах ω_j ($j = 1 \div 4$), из которых две сильные волны накачки (на частотах ω_3 и ω_4). Считаем, что среда является «левой» только на частоте сигнальной волны ω_1 , т.е. среда принимает отрицательные значения диэлектрической и магнитной проницаемостей на этой частоте и положительные значения диэлектрической и магнитной проницаемостей на частотах ω_2 , ω_3 и ω_4 . Полагаем, что потоки энергии волны на частоте ω_2 и двух волн накачек, т.е. $S_{2,3,4}$ падают нормально на левую боковую поверхность метаматериала толщины ℓ и распространяются вдоль положительного направления z оси. Отсюда перенос энергии сигнальной волны, для которой среда является «левой», происходит в противоположном направлении. рассматриваемые при четырехволновом взаимодействии семь векторов волн, т.е. $k_{1,2,3,4}$ и $S_{2,3,4}$, противоположны вектору Пойнтинга S_1 обратной сигнальной волны. С учетом граничных условий для комплексной амплитуды сигнальной волны при ее распространении справа налево в нелинейной среде в ПЗИ можно получить:

⁶⁷Rena J. Kasumova, Sh.Sh. Amirov. Frequency transformation of ultrafast laser impulses in metamaterials. *Superlattices and Microstructures*, 2019, **126**, 49-56;

Rena J. Kasumova, G.A. Safarova, A.R. Ahmadova. Group velocity mismatch at ultrashort electromagnetic pulse propagation in nonlinear metamaterials. *Open Phys.* 2019, **17**, 200-205.

$$A_1(z) = e^{-\frac{a}{2}z} \left[\frac{A_{1\ell} e^{\frac{a}{2}\ell} - \left(\frac{\delta_1}{\lambda} A_{1\ell} - i \frac{b}{\lambda} \right) \cdot \sin \lambda \ell}{\cos \lambda \ell + \frac{a}{2\lambda} \sin \lambda \ell} \left(\cos \lambda z + \frac{a}{2\lambda} \sin \lambda z \right) + \frac{\delta_1 A_{1\ell} - ib}{\lambda} \sin \lambda z \right],$$

где

$$a = \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 - \delta_1 - i\Delta, \quad b = \gamma_1 A_{20}^* A_{30} A_{40},$$

$$\lambda = \sqrt{\gamma_1 \gamma_2 I_{30} I_{40} - \gamma_1 \gamma_3 I_{20} I_{40} - \gamma_1 \gamma_4 I_{20} I_{30} - \frac{(\sum_1^4 \delta_j - i\Delta)^2}{4}}.$$

δ_j – диссипативные потери среды на соответствующих частотах ω_j ($j = 1 \div 4$); $\gamma_1 = 2\pi k_1 \chi_1^{(3)} / |\varepsilon_1|$ и $\gamma_{2,3,4} = 2\pi k_{2,3,4} \chi_{2,3,4}^{(3)} / \varepsilon_{2,3,4}$ – коэффициенты нелинейной связи волн, $\chi_j^{(3)}$ – кубичная восприимчивость, $\Delta = k_3 + k_4 - k_1 - k_2$ фазовая расстройка между взаимодействующими волнами.

Исходя из полученной формулы для $A_1(z)$, показать, что возможно компенсация потерь сигнальной волны за счет потерь прямых волн.⁶⁸

175. Из выражения для комплексной амплитуды сигнальной волны в ПЗИ можно, приведенной в Зад 174, определить пороговую амплитуду накачки в условиях фазового синхронизма в диссипативной среде.⁶⁹

⁶⁸Rena J. Kasumova. Four wave mixing and compensating losses in metamaterials. *Superlattices and Microstructures*, 2018, 121, 86-91.

⁶⁹Rena J. Kasumova. Four wave mixing and compensating losses in metamaterials. *Superlattices and Microstructures*, 2018, 121, 86-91.

НЕУПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ

Взаимодействие компонент комбинационного рассеяния. Комбинационное рассеяние – мощный инструмент для изучения спектроскопии среды, особенно спектроскопии высокого разрешения, например, для исследования структуры тонких плёнок и адсорбированных молекул. Исследование в приближении заданной интенсивности позволяет рассмотреть параметрическое взаимодействие компонент комбинационного рассеяния в общем случае диссипативных сред и фазовой расстройки между взаимодействующими волнами для всех трёх вариантов размещения нелинейной среды: вне-резонаторный случай, во внешнем резонаторе типа Фабри – Перо и внутри лазерного резонатора. Получены оптимальное фазовое соотношение для эффективного преобразования в стоксову компоненту, которое, в отличие от результата приближения заданного поля, зависит от интенсивности накачки, пороговое условие для усиления компонент рассеяния бегущей волной. Показано, что пороговая амплитуда накачки растёт с увеличением фазовой расстройки и потерь в среде. Эффективность преобразования или усиление стоксовой компоненты повышается за счёт повторного прохода волн нелинейной среды. Рассмотрен однорезонаторный вариант параметрического генератора света для компонент комбинационного рассеяния во внешнем резонаторе. Получено пороговое условие параметрической генерации. Величина пороговой интенсивности накачки растёт с увеличением потерь в резонаторе и в нелинейной среде. Показано, что учёт фазовых эффектов ведёт к увеличению пороговой интенсивности накачки. Получено оптимальное фазовое соотношение при внутрирезонаторном преобразовании частоты.

Комбинационное рассеяние света

176. Рассмотрим случай, когда взаимодействующие волны распространяются в лазерном резонаторе в положительном направлении вдоль оси z , причём в общем случае, когда на границе нелинейной среды комплексные амплитуды всех взаимодействующих волн отличны от нуля: $A_{p,s,a}(z=0) = A_{p0,s0,a0}$ (см. рис. 66). Здесь $A_{p,s,a}$ — комплексные амплитуды волн накачки, стоксовой и антистоксовой компонент на частотах $\omega_{p,s,a}$ соответственно, причём $2\omega_p = \omega_s + \omega_a$. После выхода из среды волны, распространяясь в резонаторе, отражаются от зеркала 3_2 , вновь проходят через нелинейную среду в отрицательном направлении оси z , взаимодействуя в среде. Составить граничные условия на входе справа в среду 3 после отражения от зеркала 2.⁷⁰

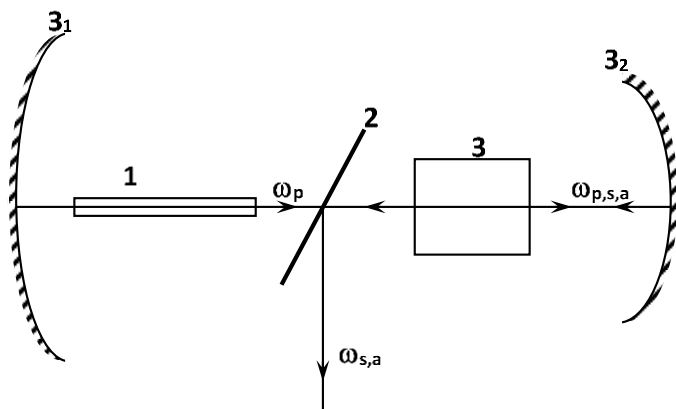


Рис. 66. Принципиальная схема лазерного резонатора: 1 – активная среда, 2 – оптический элемент, 3 – нелинейная среда, $3_{1,2}$ – зеркала лазерного резонатора.

⁷⁰Rena J. Kasumova. Raman scattering at the intracavity parametric interaction. *Applied Optics*, 2001, **40**(28) 5517-5521.

177. При взаимодействии волн, распространяющихся в лазерном резонаторе, эффективное преобразование в стоксову компоненту происходит при выполнении оптимального фазового соотношения

$$\varphi^{opt} = \operatorname{atan} \frac{(m+k) \cdot \frac{\Delta k}{2} \cdot \sinh q_1 l \cdot \cosh q_1 l \cdot \frac{\tanh q_1^p l}{q_1^p} - R}{(m+k) \cdot \sinh q_1 l \cdot \cosh q_1 l + R \cdot \frac{\Delta k}{2} \cdot \frac{\tanh q_1^p l}{q_1^p}} + 2\pi N,$$

$$N = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь

$$q_1 = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad q_2 = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \quad p = 2\delta_p + \delta_s + \delta_a - i\Delta k,$$

$$q = \delta_s(2\delta_p + \delta_a - i\Delta k) - \gamma_s I_{po}(\gamma_a I_{po} - 2\gamma_p I_{ao}),$$

$$I_{po} = A_{po} \cdot A_{po}^*, B_s = \frac{i\gamma_s I_{po} A_{ao}}{A_{so}}, P_s = \frac{\delta_s - 2\delta_p - \delta_a + i\Delta k}{2}.$$

δ, γ – коэффициенты поглощения и нелинейной связи взаимодействующих волн и, наконец, $\Delta k = 2k_p - k_s - k_a$ – фазовая расстройка.

$$R = m \cdot \left(U + \frac{\Delta k}{2} \right) \cdot \frac{\sinh^2 q_1 l}{q_1} - U \cdot \cosh^2 q_1 l,$$

$$m = q_1 + \frac{\Delta k}{2q_1} \cdot \left(U + \frac{\Delta k}{2} \right), \quad k = \frac{U \cdot \left(U + \frac{\Delta k}{2} \right)}{q_1},$$

$$n = \cosh^2 q_1 l + \left(U + \frac{\Delta k}{2} \right)^2 \cdot \frac{\sinh^2 q_1 l}{q_1^2},$$

$$U = \frac{\gamma_s I_{po} A_{ao}^*}{A_{so}}, \quad \varphi = 2\varphi_p - \varphi_s - \varphi_a - \Delta kl$$

Данное оптимальное фазовое соотношение зависит от интенсивности накачки. Показать справедливость данного утверждения.⁷¹

Когерентное антистоксовое рассеяние света

Спектроскопия когерентного антистоксова рассеяния света (КАРС) мощный инструмент для обнаружения быстропротекающих молекулярных процессов как в газах, так и в жидкостях. Согласно оценкам, уровень сигнала в КАРС-методе по сравнению со спонтанным рамановским рассеянием в 10^6 раз выше. Кроме того, антистоксовый сигнал в КАРС-методе по сравнению со случаем спонтанного комбинационного рассеяния обладает малой расходимостью и отсутствием люминесценции исследуемых веществ в области антистоксовых частот.

Современный уровень исследований характеристик нефтяных скважин предполагает использование волоконно-оптических датчиков, лишенных недостатков традиционных электрических датчиков. Такие современные распределенные датчики регистрируют изменения, которые претерпевает лазерный луч при распространении в оптическом волокне. Если в Distributed Acoustic sensor (DAS – Распределенные акустические сейсмические системы) регистрируется результат (последствия) упругого рэлеевского рассеяния лазерного луча или неупругого рассеяния на акустических колебаниях в волокне (рассеяние Бриллюэна), то в Distributed Temperature sensor (DTS – Волоконно-оптическое измерение температуры)

⁷¹Rena J. Kasumova. Коэффициент усиления антистоксовой компоненты комбинационного рассеяния (Gain of the anti-Stokes component of Raman scattering). Журнал прикладной спектроскопии, 2001, **68**(5), 577-580 (J. of Appl Spectroscopy, 2001, **68**(5), 577-580)

фиксируется комбинационное (рамановское) рассеяние лазерного луча на молекулярных колебаниях. В процессе добычи нефти DTS является эффективным инструментом для мониторинга температуры скважины. Кроме того, существуют распределенные деформационные датчики (DSS), а также распределенные температурные и деформационные датчики (DTSS). Во всех случаях роль датчика играет оптоволокно. И в процессе измерений используется один лазер. Принцип действия перечисленных датчиков основан на изменении свойств оптоволокна под влиянием изменений температуры и давления окружающей среды (нефти, газа, песка, воды и т.д.). При этом лазерный луч реагирует на эти изменения, рассеиваясь на акустических или молекулярных колебаниях оптоволокна. Спектр рассеянного назад лазерного луча анализируется для определения с высокой точностью температуры или деформации на разных уровнях зондирования, т.е. для осуществления распределенного зондирования. В настоящее время, благодаря низким потерям в оптоволокне, распределенное зондирование реализуется на глубине в десятки километров.

Отметим проблемы, сопутствующие оптоволоконным датчикам. DAS, работающие на эффекте Рэлея, имеют сильный сигнал рассеяния (или поглощения) по сравнению с бриллюэновским и рамановским сигналами рассеяния. Эти датчики востребованы (более эффективны), когда шумы в системе велики. При рассеянии Бриллюэна частотный сдвиг компонент рассеяния от лазерной (или рэлеевской) частоты мал \sim ГГц и необходимо привлечение схем фильтрации для выделения полезного бриллюэновского сигнала рассеяния от рэлеевского сигнала. При DTS частотный рамановский сдвиг на три порядка выше, составляет 13.2 ТГц, поэтому отпадает необходимость в применении сложных схем фильтрации. Однако интенсивность информативного сигнала комбинационного рассеяния мала и для повышения уровня SNR (отношения сигнал/шум) используют многомодовые волокна, производ-

ство которых значительно дороже одномодовых.

Современные стандартные системы DTS, регистрирующие изменение температуры скважины, могут определять температуру с пространственным разрешением 1 м (некоторые системы высокого класса могут достигать разрешения 20-30 см) и точностью $\pm 0,5-1^\circ\text{C}$ с разрешением $0,01^\circ\text{C}$. Это позволяет оперативно реагировать на процесс бурения нефтяной скважины и оптимизировать ее работу. Для более эффективного контроля температуры процесса необходимо повысить уровень интенсивности антистоксовой компоненты рамановского рассеяния, которая несет информацию о температурных изменениях в зондирующем пространстве.

Значительное повышение интенсивности антистоксовой компоненты лазерного излучения при рамановском рассеянии возможно, во-первых, при помещении активной лазерной среды внутрь лазерного резонатора, во-вторых, при когерентном антистоксовом рассеянии света (КАРС), когда используются два лазера. Один лазер с фиксированной частотой, другой с изменяемой частотой. Перестраивая частоту второго лазера, можно настроиться на частоту молекулярных колебаний вещества и в результате добиться согласованных, т.е. когерентных колебаний всех молекул исследуемой среды. Применительно к DTS второй подход более перспективен.

При КАРС-методе на входе в среду присутствуют две лазерные волны на частотах ω_p (волна накачки) и ω_s (сигнальная волна) (рис. 67). В результате нелинейного взаимодействия в среде возбуждается волна на разностной частоте $\omega_v = \omega_p - \omega_s$, что эквивалентно возбуждению молекулярных колебаний на данной частоте. Далее в результате нелинейного смешения данной волны на разностной частоте с волной накачки происходит генерация когерентного сигнала на антистоксовой частоте $\omega_a = 2\omega_p - \omega_s$. Если в спонтанном случае рассеяния от каждого возбуждения происходят в разных направлениях и со случайной фазой волн, то в когерентном случае рассеяния от

каждого возбуждения происходят согласованно, синфазно и в одном направлении. Плавно меняя частоту сигнальной волны вблизи частоты комбинационного перехода, можно получить сильный антистоксовый сигнал в момент совпадения разностной частоты $\omega_p - \omega_s$ с частотой молекулярных колебаний ω_v среды, т.е. в момент резонанса.

Согласно оценкам уровень сигнала в КАРС-методе по сравнению со спонтанным рамановским рассеянием в 10^6 раз выше. Кроме того антистоксовый сигнал в КАРС-методе по сравнению со случаем спонтанного комбинационного рассеяния обладает малой расходимостью и отсутствием люминесценции исследуемых веществ в области антистоксовых частот. В рамановски активной среде (Raman-active medium) с кубичной поляризацией $\chi^{(3)}$ одновременно происходят стимулированное рамановское рассеяние стоксовой и антистоксовой компонент и КАРС.

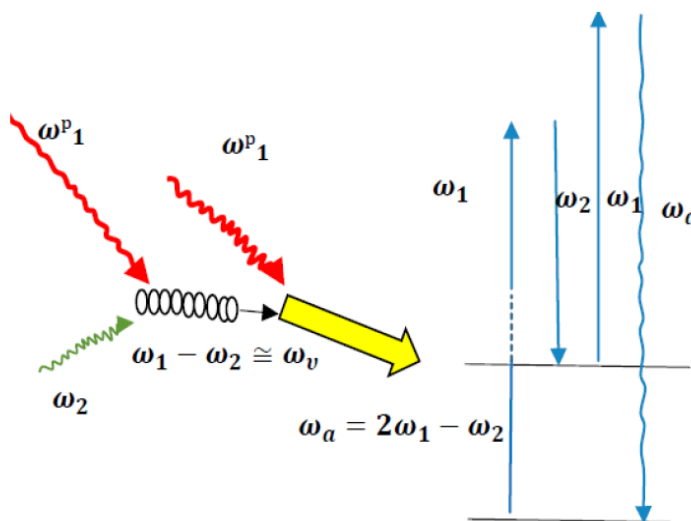


Рис. 67. Процесс КАРС, исходя из представления о взаимодействии фотонов и оптических волн.

В теории связанных волн процесс генерации когерентной антистоксовой компоненты комбинационного рассеяния эквивалентен процессу четырехволновой параметрической генерации. Отсюда при КАРС генерация и усиление носят пороговый характер, определяемый потерями. При смешении четырех оптических волн нелинейное взаимодействие волн осуществляется благодаря волне кубичной поляризации среды. Процессы третьего порядка в отличие от процессов второго порядка наблюдаются во всех средах и находят много разных приложений, в частности в спектроскопии.

178. Рассмотрим КАРС при нормальном падении волны накачки и стоксовой волны слева на нелинейную среду. Полагая, что волны распространяются вдоль положительного направления z оси. Для описания этих процессов в квазистационарном случае система волновых уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{dA_p}{dz} + \delta_p A_p &= -i[\gamma_p^s |A_s|^2 A_p + \gamma_p^{sa} A_p^* A_s A_a e^{-i\Delta z} + \gamma_p^a |A_a|^2 A_p], \\ \frac{dA_s}{dz} + \delta_s A_s &= -i[\gamma_s |A_p|^2 A_s + \gamma_s^{sa} A_p^2 A_a^* e^{i\Delta z}], \\ \frac{dA_a}{dz} + \delta_a A_a &= -i[\gamma_a |A_p|^2 A_a + \gamma_a^{sa} A_p^2 A_s^* e^{i\Delta z}].\end{aligned}$$

Здесь $A_{p,s,a}$ – комплексные амплитуды волны накачки, стоксовой и антистоксовой компонент, γ_i ($i = s, a$) и $\gamma_p^{s,a}$, $\gamma_{p,s,a}^{sa}$ – нелинейные коэффициенты связи. Члены с $\chi_{p,s,a}^{(3)}$, $\delta_{p,s,a}$ и $n_{p,s,a}$ определяют кубичную восприимчивость рамановски активной среды, линейные потери и показатели преломления на соответствующих частотах $\omega_{p,s,a}$. Фазовую расстройку волновых векторов в случае четырехволнового смешения равна $\Delta k = 2k_p - k_s - k_a$.

Каково различие между спонтанным комбинационным рассеянием и КАРС?

Определить физический смысл каждого из членов, находящихся в правой части системы уравнений.⁷²

179. Известные укороченные уравнения, описывающие генерацию антистоксовой компоненты при КАРС в среде с кубической нелинейностью имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial A_p(z, \omega)}{\partial z} + \frac{1}{u_p} \frac{\partial A_p(z, t)}{\partial t} + \delta_p A_p &= -i [\gamma_p^s |A_s|^2 A_p + \gamma_p^{sa} A_p^* A_s A_a e^{-i\Delta z} + \gamma_p^a |A_a|^2 A_p], \\
 \frac{\partial A_s(z, \omega)}{\partial z} + \frac{1}{u_s} \frac{\partial A_s(z, t)}{\partial t} + \delta_s A_s &= -i [\gamma_s |A_p|^2 A_s + \gamma_s^{sa} A_p^2 A_a^* e^{i\Delta z}], \\
 \frac{\partial A_a(z, \omega)}{\partial z} + \frac{1}{u_a} \frac{\partial A_a(z, t)}{\partial t} + \delta_a A_a &= -i [\gamma_a |A_p|^2 A_a + \gamma_a^{sa} A_p^2 A_s^* e^{i\Delta z}], \\
 \gamma_p^s &= \frac{2\pi\omega_p}{cn_p} \chi_s^{(3)*} (\omega_p = \omega_s - \omega_s + \omega_p), \\
 \gamma_p^{sa} &= \frac{2\pi\omega_p}{cn_p} [\chi_{sa}^{(3)*} (\omega_p = \omega_a + \omega_s - \omega_p) + \chi_{sa}^{(3)*}], \\
 \gamma_p^a &= \frac{2\pi\omega_p}{cn_p} \chi_a^{(3)} (\omega_p = \omega_a - \omega_a + \omega_p), \\
 \gamma_s &= \frac{2\pi\omega_s}{cn_s} \chi_s^{(3)} (\omega_s = \omega_p - \omega_p + \omega_s), \\
 \gamma_s^{sa} &= \frac{2\pi\omega_s}{cn_s} \chi_{sa}^{(3)} (\omega_s = 2\omega_p - \omega_a),
 \end{aligned}$$

⁷²Rena J. Kasumova, N. V. Kerimova, G. A. Safarova. Phase effects on coherent anti-Stokes Raman scattering. *J of Applied Spectroscopy*, 2021, **88**(1), 17-24.

$$\gamma_a = \frac{2\pi\omega_a}{cn_a} \chi_a^{(3)} (\omega_a = \omega_p - \omega_p + \omega_a),$$

$$\gamma_a^{sa} = \frac{2\pi\omega_a}{cn_a} \chi_{sa}^{(3)*} (\omega_a = 2\omega_p - \omega_s).$$

Здесь $A_{p,s,a}$ комплексные амплитуды волны накачки, стоксовой и антистоксовой компонент, γ_i ($i = s, a$)

Перечислить члены, ответственные

- за вынужденное рамановское рассеяние света,
- за вклад четырехволнового смешения в нелинейную поляризацию на частотах $\omega_{p,s,a}$.

Вынужденное рассеяние Мандельштама – Бриллюэна

Спектроскопический анализ неупругого рассеяния света позволяет получить информацию о процессах, происходящих в рассеивающей среде, о фотоупругих и акустических свойствах веществ. Определяя частотный сдвиг, интенсивность компоненты рассеяния, можно обнаружить и судить какие процессы происходят в твердых телах, жидкостях и газах. Вынужденное рассеяние Мандельштама – Бриллюэна (ВРМБ) успешно применяется для компрессии импульсов, усиления и обращения волнового фронта оптических сигналов, диагностики плазмы. ВРМБ характеризуется более низким порогом, чем вынужденное комбинационное рассеяние, что делает его привлекательным для приложений. Одним из перспективных направлений исследований с применением вынужденного рассеяния Мандельштама – Бриллюэна (ВРМБ) является исследование характеристик нефтяных скважин.

До настоящего времени изучены пороговые условия при ВРМБ в плазме, детально рассмотрено ВРМБ при нарушении фазового синхронизма, вызванного фазовой модуляцией взаимодействующих волн. Построена теория ВРМБ, учитывающая

изменение показателя преломления среды из-за нагрева, которая хорошо согласуется с экспериментом. Предложен следующий механизм данной модуляции: часть световой волны, распространяющейся в среде, поглощается, что приводит к нагреву и к изменению показателя преломления рассеивающей среды.

При КАРС в процессе рассеяния участвует так называемый оптический фонон (молекулярные колебания в среде), а при ВРМБ – акустический фонон. Закон сохранения энергии и импульса имеет вид

$$\begin{aligned}\omega_a &= \omega_p - \omega_s, \\ k_a &= k_p - k_s,\end{aligned}$$

где с индексом “а” отмечены параметры акустического фонона. В классическом описании взаимодействуют две оптические волны (накачки и стоксовой компоненты) и одна акустическая волна. Возникающая акустическая волна создает периодическую решетку показателя преломления.

Отметим специфические особенности ВРМБ:

- модульное значение волнового вектора волны накачки и рассеянной стоксовой компоненты практически равны, т.е. $|\vec{k}_p| \cong |\vec{k}_s|$ так как $|\vec{k}_{ак}|$ на четыре порядка величины меньше, чем $|\vec{k}_p|, |\vec{k}_s|$; отсюда

- во-первых, максимальный частотный сдвиг для компоненты рассеяния наблюдается при обратном направлении распространения рассеянной волны, т. е. при встречном по отношению в волне накачки направлению распространения, когда угол между направлением волны накачки и направлением стоксовой компоненты $\theta = 180^\circ$. Этот вывод следует из дисперсионного соотношения;

- во-вторых, фазовая расстройка $\Delta = k_p - k_s - k_{ак} \cong 0$. Однако экспериментально доказано, что при распространении

в среде часть световой волны поглощается, что приводит к нагреву и к изменению показателя преломления рассеивающей среды. Это приводит к нарушению условия фазового синхронизма, что было детально рассмотрено в ПЗИ.⁷³

180. Вывести дисперсионное соотношение, связывающее ω_a и k_a при ВРМБ. Оценить максимальное значение смещения частоты стоксовой компоненты, взяв, скорость звука в одномодовом оптическом кварцевом волокне $V_a = 5.96$ км/с, $n = 1.45$ и $\lambda_p = 1.55$ мкм.

181. Максимальный коэффициент усиления g_B при смещении частоты стоксовой компоненты волны $\nu = \nu_B$ равен $g_B(\nu_B) = 8\pi^2 \gamma_e^2 / (n\lambda_p^2 \rho_0 c V_a \Delta\nu_B)$, где γ_e – коэффициент электрострикции, ρ_0 – плотность среды, V_a – скорость звука, $\Delta\nu_B$ – ширина спектра ВРМБ. Оценить g_B для плавленого кварца: $n=1.45$, $\gamma_e = 0.902$, $\rho_0=2210$ кг/м³, $\Delta\nu_B=10$ МГц, $\lambda_p = 1.5$ мкм, скорость звука $V_a=5,96$ км/с.

182. Оценить пороговую мощность непрерывной накачки при ВРМБ в оптоволокне, исходя из соотношения $P_0^{thresh} \approx 20 \cdot \frac{S_{eff}}{L_{eff}} / g_B$, для длины волны 1.55 мкм, $S_{eff} = 50$ мкм², $L_{eff} = 20$ км, $g_B = 5 \cdot 10^{-10}$ м/Вт.

Вынужденное поляритонное рассеяние

Фононные поляритоны активны в кристаллах без центра инверсии. Поляритон в среде возникает в результате взаимодействия фотонов с возбуждениями среды – фононами, в

⁷³Р.Дж. Касумова, Н.В. Керимли, Г.А. Сафарова. Фазовые эффекты при вынужденном рассеянии Мандельштама-Бриллюэна.

частности. Взаимодействие волн с возбуждениями среды становится сильным в резонансе, когда частоты и волновые векторы волн совпадают. В процессе ВКР на поляритонах возможно усиление стоксовой волны в поле интенсивной волны накачки, а при КАРС за счет квадратичной и кубической нелинейной восприимчивости среды происходит. В теории связанных волн вынужденное поляритонное рассеяние интерпретируется как взаимодействие четырех волн – мощной волны накачки, стоксовой волны, ИК волны и, наконец, волны материального возбуждения (поляритонной волны). В стационарном случае данный процесс, состоящий из ВКР и параметрической генерации, имеющих место в нелинейной среде, описывается системой укороченных уравнений. Исследования показали, что фазовые эффекты влияют на формирование стоксовой и поляритонной волн при ВКР и КАРС.

183. Рассмотрим поляритонное рассеяние в диспергирующей нелинейной среде. При этом фазовая расстройка между взаимодействующими волнами накачки (p), сигнальной (s) и поляритонной (3) волны вдоль оси z равняется

$$\Delta = k_{pz} - k_{sz} - k_{3z}.$$

Дисперсионная зависимость для фононных поляритонов определяется выражением

$$k_3 = \frac{\omega_3}{c} \varepsilon_{eff}^{1/2},$$

где

$$\varepsilon_{eff}^{1/2} = \varepsilon_{\infty} + \frac{\omega_0^2 \Delta \varepsilon}{\omega_0^2 - \omega_3^2 + i \Delta \omega_L \omega_0}.$$

CPA - Жерар Муру и Донна Стрикленд

Внутренние атомные поля – 10^9 В/см, что соответствует 10^{11} Вт/см²

Лазерные поля 10^7 В/см, что соответствует 10^{10} Вт/см²

При CPA 10^{22} Вт/см² (нелин св-ва вакуума, создание электронных пучков рентгеновского диапазона)

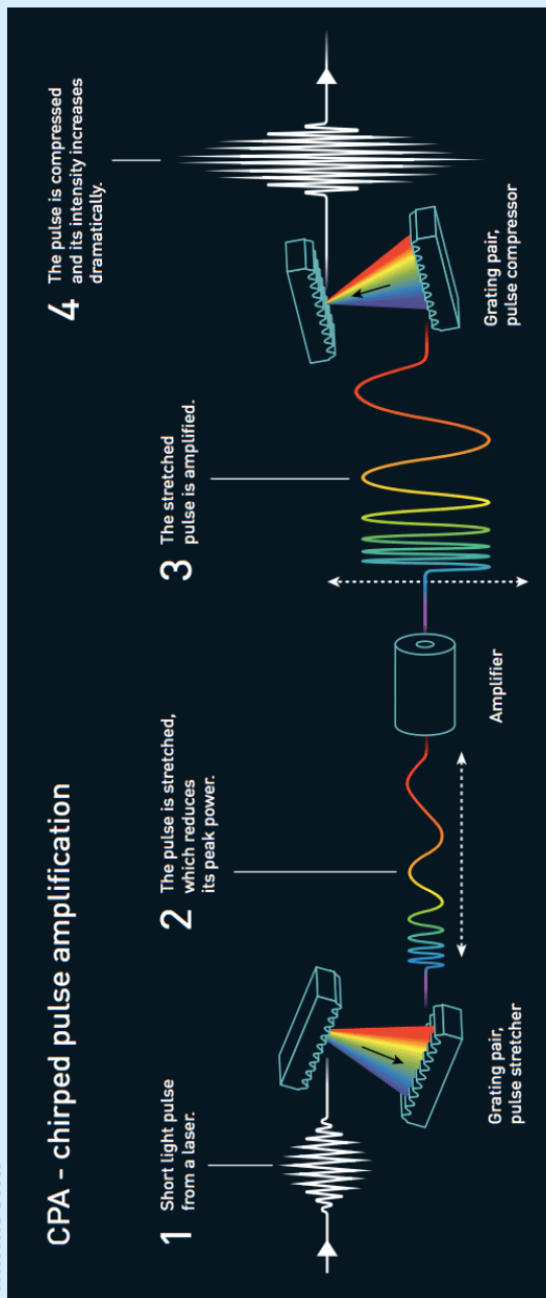


Рис. 68. Усиление chirпованных импульсов
(Нобелевская премия за 2018 г.)

Здесь $\Delta\omega_L$, $\Delta\varepsilon$ – параметры акустической решетки, ω_0 – частота поперечных колебаний решетки кристалла, ε_∞ – диэлектрическая проницаемость на частотах выше частоты колебаний.

Построить дисперсионную кривую для кубического кристалла GaP, принадлежащего к точечной группе $\bar{4}3m$: $\varepsilon_\infty=8,457$; $\Delta\varepsilon = 1,725$; $\Delta\omega_L/\omega_0 = 0,003$; $\omega_0 = 366 \text{ см}^{-1}$.⁷⁴

⁷⁴Rena J. Kasumova. Рассеяние света на поляритонах в кристаллах GaP. Журнал прикладной спектроскопии, 2003, т.70, №6, с.798-802. (Light scattering on polaritons in GaP crystals. (J. of Appl. Spectroscopy)).

ОТВЕТЫ

1.

- Различают электронную, ионную и ориентационную (вращательную) виды поляризованности (времена поляризованности приведены на рис. 69).

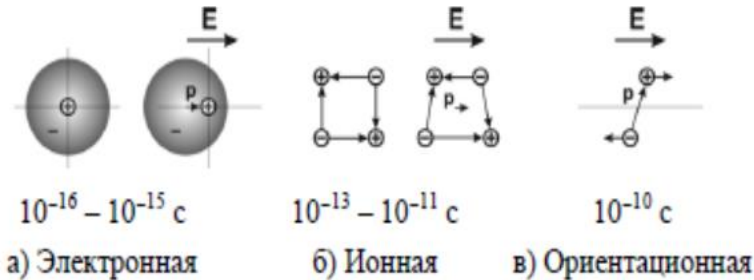


Рис. 69. Поляризованность диэлектрика.

- Самая высокая скорость поляризованности диэлектрика происходит благодаря электронному смещению в диэлектрике (электронная поляризованность), более низкая скорость установления поляризованности связана с перемещением ионов (ионная поляризованность). Разные скорости объясняются массами смещаемых объектов, более легкие электроны гораздо подвижны, менее инерционны по сравнению с тяжелыми ионами. Поворот дипольных моментов приводит к ориентационной поляризованности диэлектрика.
- В оптическом диапазоне определяющую роль в поляризованности диэлектрика играет электронная поляризованность. При длинах волн излучения, попадающих в средний и дальний ИК диапазон ($> 10 \text{ мкм}$), существенна как электронная, так и ионная поляризованности диэлектрика.

2.

$$P(E) = \chi^{(1)}E + \chi^{(2)}E^2 + \chi^{(3)}E^3 + \dots + \chi^{(m)}E^m.,$$

$$P^L = P^{(1)} = \chi^{(1)}E,$$

$$P^{NL} = \chi^{(2)}E^2 + \chi^{(3)}E^3 + \dots + \chi^{(m)}E^m$$

$$P^{(2)} = \chi^{(2)} E^2,$$

$$P^{(3)} = \chi^{(3)} E^3.$$

Рассмотрим случай возбуждения квадратичной нелинейности нецентросимметричной среды. Тогда внешнее поле возбуждает в среде поляризованность второго порядка: $P^{(2)} = \chi^{(2)} E^2$. В среде полное поле отличается от падающего поля E плоской монохроматической электромагнитной волны. Оно равно сумме падающего поля E и поля, связанного с нелинейной поляризованностью $P^{(2)}$. Если напряженность внешнего поля была бы порядка внутриатомного поля, то члены разложения поляризованности были бы одного порядка, т.е. $P = P(E) = \chi^{(1)} E_a + \chi^{(2)} E_a^2 + \chi^{(3)} E_a^3 + \dots$, так как $\chi^{(1)} \sim 1$, то $\chi^{(2)} E_a^2 \sim E_a$, отсюда $\chi^{(2)} E_a \sim 1/E_a$, $\chi^{(2)} \sim 1/E_a^2$ и т.д. Достижимые на практике лазерные поля, считаем, удовлетворяют условию $E \ll E_a$. Хотя поле сфокусированного лазерного пучка может превышать внутриатомное поле. Однако в рамках данного рассмотрения полагаем, что $E \ll E_a$. Каждый последующий член разложения меньше предыдущего, т.е. $P^{(NL)} \ll P^{(L)}$, что справедливо для разложения поляризованности. Поэтому данный ряд сходится. Это дает возможность учитывать только несколько первых членов разложения. Здесь появляется параметр малости $P^{(NL)}/P^{(L)}$, который в волновом уравнении характеризует малость нелинейного члена. Имеем $P^{(NL)}/P^{(L)} = P^{(2)}/P^{(1)} = E/E_a$. Однако, как правило, отношение внешнего лазерного поля E к атомному полю E_a , $E/E_a \sim 10^{-2}$, что является достаточно большой величиной, которой нельзя пренебрегать и ее необходимо учитывать в разложении ряда.

3. $P^{(2)}/P^{(1)} = 10^{-6}$, $P^{(3)}/P^{(2)} = 10^{-4}$.

4. $P_{2\omega}$ определяется членами с частотами $\omega + \omega$, а поляризованность на суммарной частоте $P_{\omega_1 + \omega_2}$ зависит от членов $\omega_1 + \omega_2$ и $\omega_2 + \omega_1$. Отсюда поляризованность при вырожденном случае, т.е. при генерации второй гармоники в 2 раза меньше, чем в

общем невырожденном случае при генерации суммарной частоты, когда

$$P_i^{\text{квадр}}(\omega_1 + \omega_2) = \sum_k \sum_j \chi_{ikj}(\omega_1 + \omega_2) E_k(\omega_1) E_j(\omega_2).$$

5. $2 \cdot 10^{-2}$.

6. Возможны ГВГ на частотах $2\omega_1$ и $2\omega_2$ (с квантовой точки зрения – два фотона одновременно поглощаются в среде, система переходит на виртуальный уровень с энергией $2\hbar\omega$, после времени, равной времени релаксации, система переходит на нижний уровень, излучая фотон на удвоенной частоте $2\omega_1$ или $2\omega_2$); генерация суммарной частоты $\omega_1 + \omega_2$, генерация разностной частоты $\omega_1 - \omega_2$, $\omega_2 - \omega_1$ и эффект оптического выпрямления на нулевой частоте.

7. При падении на среду с кубической нелинейностью волны вида $E = A \cos \omega t$ поляризованность имеет вид $P^{(3)} = \chi^{(3)} E^3 = \frac{1}{4} \chi^{(3)} A^3 \cos 3\omega t + \frac{3}{4} \chi^{(3)} A^3 \cos \omega t$ и возможны:

- генерация третьей гармоники на частоте 3ω (3 фотона одновременно поглощаются в среде, система переходит на виртуальный уровень с энергией $3\hbar\omega$, после времени, равной времени релаксации, система переходит на нижний уровень, излучая фотон на утроенной частоте 3ω , что описывается первым членом разложения поляризованности третьего порядка;
- эффект переизлучения на частоте падающей волны, но с амплитудой, равной кубу амплитуды волны E , что связано со вторым членом разложения поляризованности.

8. $\alpha = -\frac{e^2}{m_e \omega(\omega + 2i\delta)}$. $\alpha = 4a_0^3 \cong 6 \cdot 10^{-25} \text{ см}^{-3}$, т.е. поляризуемость свободного электрона в УФ диапазоне спектра по величине порядка объема атома водорода.

9. 10^{10} В/м .

10. На рис. 2 дана известная экспериментально полученная в 1962 г. американским физиком Терхьюном с сотрудниками зависимость интенсивности излучения второй гармоники от длины кристалла, представляющая череду осцилляций, так

называемых биений Мейкера. В эксперименте, как правило, изменения длины кристалла осуществляется вращением образца относительно падающего луча. В ПЗП интенсивность второй гармоники меняется как $\sin^2 \frac{\Delta k L}{2}$, где $\Delta k = k_2 - 2k_1 = (n_{2\omega} - n_\omega)2\omega/c$. Расстояние между соседними максимумами, т.е. период осцилляций позволяет определить $n_{2\omega} - n_\omega$ в исследуемом кристалле. Также можно определить когерентную длину кристалла в ПЗП: $l_{coh} = \pi/\Delta k$. При постоянной когерентной длине кристалла и мощности накачки из данной зависимости интенсивности второй гармоники можно определить квадратичную нелинейность кристалла. Другой метод определения квадратичной нелинейности кристалла следует из анализа зависимости в ПЗИ.

11. $L = n_0 L + n_2 \frac{I_0}{\delta} [1 - \exp(-\delta L)] + n_4 \frac{I_0^2}{2\delta} [1 - \exp(-2\delta L)]$

12. При интенсивном лазерном поле населенности уровней, между которыми происходит квантовый переход, выравниваются, наступает эффект насыщения. Поглощаемая мощность уменьшается и определяется релаксационными процессами. Увеличение интенсивности падающего лазерного поля не приводит к росту поглощения, т. е. среда становится прозрачной для падающего светового поля. Наступает просветление среды.

13. $\varepsilon^{(1)}(\omega) = 1 + 4\pi\chi^{(1)}(\omega) = 1 + 4\pi \frac{Ne^2}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega)}$ (γ – параметр затухания, который введен в уравнение движения гармонического осциллятора. Уравнение для электрона, колеблющегося около положения равновесия: $\frac{d^2 r}{dt^2} + 2\gamma \frac{dr}{dt} + \omega_0^2 r = -\frac{e}{m_e} E$).

14. $\chi^{(1)}(\omega) = \frac{Ne^2}{m_e} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega)}$

15. Квадратичная восприимчивость

$$\chi^{(2)} = \frac{\beta Ne^2}{\varepsilon_0 m_e^2} \frac{\left(\frac{1}{\omega_0^2} + \frac{\cos 2\omega t}{\omega_0^2 - (2\omega)^2} \right)}{(\omega_0^2 - \omega^2)(1 + \cos 2\omega t)}.$$

16. $n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{m_e} \frac{4\pi}{(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega)}$. $k^2 = \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2}$, где $\varepsilon = 1 + 4\pi\chi$,

γ – параметр затухания. k – это постоянная распространения волны в среде, она численно равна числу волн, укладывающихся на единице длины, умноженному на 2π (Разъяснение по определению: на длине λ укладывается 1 волна, а на единице длины $1/\lambda$).

Полученное соотношение является комплексной величиной при больших коэффициентах затухания γ .

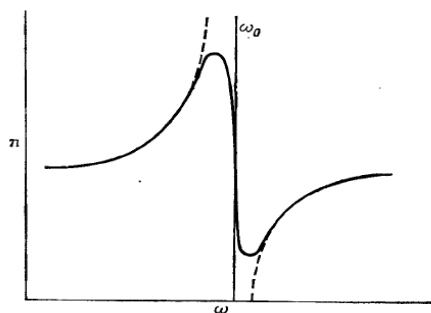


Рис. 70. Зависимость показателя преломления вблизи частоты собственных колебаний ω_0 .

Сплошная кривая на рис. 70 отражает действительную часть показателя преломления,

$$\text{Re } n^2 = 1 + \frac{4\pi Ne^2}{m_e} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2},$$

в области нормальной дисперсии. Мнимая часть показателя преломления,

$$\text{Im } n^2 = \frac{4\pi Ne^2}{m_e} \frac{2\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2},$$

характеризующая поглощательную способность среды, в окрестности ω_0 , как видно из выражения, принимает большое значение. Эта зона аномальной дисперсии. Пунктирная кривая соответствует случаю отсутствия затухания в среде.

17. Модуль среднего по времени плотности потока энергии

(интенсивности) излучения диполя происходит по закону $S \sim \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta$, где r – расстояние от излучателя до точки наблюдения. Излучение помимо r зависит от угла θ . Максимум излучения приходится на направление перпендикулярное к его оси, когда угол $\theta = \pi/2$. В направлениях по оси диполя, когда $\theta = 0$ или π , диполь не излучает. На рис. 2 дана диаграмма направленности. Луч, проведенный из центра диполя под углом θ , дает направление излучения под данным углом. Отрезок луча между центром диполя и точкой пересечения луча с диаграммой дает величину интенсивности излучения в данном направлении. Фаза излучения от диполя определяется фазой падающей на него волны. Поэтому хотя каждый отдельный диполь и излучает волны в разных направлениях, волны, излучаемые отдельными диполями в направлениях, отличных от прямого, интерферируя, гасят друг друга. Только для направления вперед все диполи сфазированы таким образом, что волны складываются в фазе; они образуют сфазированную антенную решетку.

$$18. \operatorname{Re} \chi = \frac{Ne^2}{m_e} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}, \quad |\operatorname{Im} \chi| = \frac{Ne^2}{m_e} \frac{2\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}.$$

19. Под действием внешнего поля $E = A \cos \omega t$ связанный электрон совершает колебания. При слабых внешних полях отклик среды линейный. В линейной оптике (модель линейного осциллятора) возвращающая сила, действующая на электрон со стороны ядра, $F(x) = -kx$. Электрон совершает гармонические колебания около положения равновесия по закону $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, где φ_0 – начальная фаза колебаний, ω_0 – собственная частота колебаний электрона (атомного осциллятора). При сильных внешних лазерных полях появляется нелинейный отклик среды, что является следствием ангармонических колебаний электрона около положения равновесия.

Уравнения движения гармонического осциллятора имеет вид

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m_e} E(t),$$

где m_e – масса электрона, $\omega_0 = \sqrt{k/m_e}$ – частота собственных колебаний электрона, δ – коэффициент затухания колебаний электрона, eE – сила, действующая на электрон со стороны поля, e – заряд. Под действием периодической вынуждающей силы возникают гармонические вынужденные колебания с частотой ω , совпадающей с частотой вынуждающей силы. Решение данного уравнения гармонического осциллятора имеет вид

$$x(t) = \frac{eA}{m_e \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \delta^2 \omega^2}} \cos(\omega t - kx + \varphi),$$

$$\varphi = \arctg \frac{\delta \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

20. Параметр ангармонизма равен $\gamma = \frac{\omega_0^2}{x_0}$.

В линейной модели среды квазиупругая возвращающая сила $F_{lin}(x) = m_e(-\omega_0^2 x) = eE_a$, где E_a – внутриатомное поле. В нелинейной модели нелинейная составляющая возвращающей силы $F_{nonlin}(x) = -m_e \gamma x^2 - m_e \beta x^3 - \dots$. Ограничиваясь только квадратичным членом в выражении для $F_{nonlin}(x)$, допустим величины линейной и нелинейной сил равны при смещении $x = x_0$, т.е. $m_e \omega_0^2 x_0 = m_e \gamma x_0^2$. Отсюда параметр ангармонизма равен $\gamma = \frac{\omega_0^2}{x_0}$.

21. В системе СИ линейная восприимчивость

$$\chi^{(1)} = Ne^2 / \varepsilon_0 m_e (\omega_0^2 - \omega^2).$$

22. Классическая электродинамика рассматривает процессы, связанные с электромагнитным излучением и описывает свойства электромагнитного поля посредством системы уравнений Максвелла, в то время как современная квантовая теория электромагнитного поля и взаимодействия поля рассматриваются в рамках квантовой электродинамики. Электромагнитные излучения различных частот взаимодействуют с веществом также по-разному. Как правило световые волны рассматриваются как электромагнитные волны, за исключением случаев, когда необходимо учитывать квантово-механические свойства света.

Отметим, что в пределах оптического диапазона, в области рентгеновского и гамма-излучения на первый план выступают квантовые свойства излучения. При рассмотрении взаимодействия бегущих волн в нелинейной среде, учитывая протяженность среды, когда размеры среды много больше длины волны излучения, используется волновая природа электромагнитного излучения. Отсюда вся волновая оптика, как линейная, так и нелинейная, анализируется с помощью уравнений Максвелла.

23. $\Delta n_{ph} \Delta \varphi \geq 1/2$.

Энергия электромагнитного поля $E = n_{ph} \hbar \omega$, где n_{ph} – число фотонов. Отсюда для флуктуций числа фотонов имеем $\Delta n_{ph} = \Delta E / \hbar \omega$. Известно, что фаза волны $\varphi = \omega t$, отсюда для флуктуации фазы волнового пакета с неопределенностью временного интервала имеем $\Delta \varphi = \omega \Delta t$. Из соотношения неопределенностей Гейзенберга

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar/2,$$

подставляя значения параметров $\Delta E = \Delta n_{ph} \cdot \hbar \omega$ и $\Delta t = \Delta \varphi / \omega$ получаем $\Delta E \Delta t = \Delta n_{ph} \hbar \Delta \varphi \geq \hbar / 2$. Откуда следует

$$\Delta n_{ph} \Delta \varphi \geq 1/2.$$

Отсюда $\Delta \varphi \geq 1/2 \Delta n_{ph}$. Амплитуда поля может быть измерена с высокой точностью, т.е. $\Delta E / E \ll 1$. А отношение $\Delta E / E = \Delta n_{ph} / n_{ph}$, то значит и $\Delta n_{ph} / n_{ph} \ll 1$. Число фотонов $n_{ph} \gg 1$, поэтому последнее неравенство может выполняться и при больших $\Delta n_{ph} \gg 1$. Так как изменение числа фотонов Δn_{ph} может быть большим, из $\Delta \varphi \geq 1/2 \Delta n_{ph}$ получаем $\Delta \varphi \geq 0$. Отсюда изменение фазы $\Delta \varphi \ll 1$. Значит фаза волны величина, определяемая с высокой точностью. Значит волновое описание электромагнитной волны излучения корректно.

24. Из уравнения Максвелла для поля диэлектрика в общем случае анизотропной среды имеем

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0,$$

откуда следует, исходя из известного соотношения

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{D} dV,$$

(где $d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS$, а \vec{n} – нормаль к поверхности, совпадающая с вектором \vec{k}), что

$$\oint_S \vec{D} dS = 0.$$

Отсюда $\vec{D} \cdot \vec{k} = 0$, что означает, что вектор $\vec{D} \perp \vec{k}$.

Для монохроматической волны с частотой ω и волновым вектором \vec{k} вектор плотности потока энергии излучения, т.е. вектор Пойнтинга равняется

$$\vec{S} = \frac{c^2}{4\pi\omega} \vec{E} \times (\vec{k} \times \vec{E}),$$

где $\vec{E} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = \vec{k}E^2 - \vec{E}(\vec{k} \cdot \vec{E})$.

Отсюда $\vec{S} \cdot \vec{E} = \text{const} \cdot [(\vec{k} \cdot \vec{E})E^2 - (\vec{E} \cdot \vec{E})(\vec{k} \cdot \vec{E})] = \text{const} \cdot [(\vec{k} \cdot \vec{E})E^2 - E^2(\vec{k} \cdot \vec{E})] = 0$. Откуда следует, что $\vec{E} \perp \vec{S}$.

В общем случае анизотропной среды $D_i = \varepsilon_{ik}E_k$, где ε_{ik} – тензор диэлектрической проницаемости среды. Откуда следует, что в анизотропной среде направления векторов электрической индукции \vec{D} и напряженности электрического поля \vec{E} не совпадают. В результате приходим к заключению, что между векторами \vec{E} и \vec{D} существует некий угол, обозначенный как β (рис. 6).

В случае изотропной среды направления векторов \vec{E} и \vec{D} совпадают ($\beta = 0$). Для используемых в нелинейной оптике кристаллов угол анизотропии находится в интервале $\beta = 1^\circ \div 4^\circ$.

25.

- $|\text{tg} \beta| = \sin 2\theta \cdot \frac{n_0 - n_e}{n_0}$.

- В изотропной среде угол анизотропии равен нулю, $\beta = 0$. Этот угол равен нулю также в анизотропной среде одноосного кристалла для обыкновенных волн.

26. $a, \text{В/м} = \sqrt{\frac{752}{cn}} I, \text{ВТ/см}^2$, где n – показатель преломления на длине волны лазерного излучения.

27. $0.71 \cdot 10^7 \text{ В/см}$.

28. $0.64 \cdot 10^6 \text{ В/см}$.

29. Благодаря эффекту двулучепреломления происходит снос энергии необыкновенных волн на частоте основного излучения и второй гармоники.

$$|tg\beta_1| = \sin 2\theta_s \cdot \frac{n_{01}-n_{e1}}{n_{01}} \text{ и } |tg\beta_2| = \sin 2\theta_s \cdot \frac{n_{02}-n_{e2}}{n_{02}}.$$

Для обыкновенной волны основного излучения снос энергии отсутствует. При рассматриваемом случае ое-е взаимодействия ГВГ происходит на длине кристалла $L_{1\beta}$, пока существует эффективное перекрытие обыкновенной и необыкновенной волн основного излучения (заштрихованная область).

30. $v_{gr} = c / \left[n(\lambda) - \lambda \frac{dn}{d\lambda} \right].$

31. $u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$, где u – групповая скорость волны, а v – фазовая скорость волны.

32. $u = c / \left[n - \lambda \frac{dn}{d\omega} \right].$

33. В линейном приближении, когда пренебрегаем членами высших порядков, разложение в ряд Тейлора в окрестности k_0 имеет вид

$$\omega(k) = \omega_0 + \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0} (k - k_0) \dots$$

Отсюда производная от соотношения $\omega(k)$ по параметру k дает:

$$u = \left(\frac{d\omega}{dk} \right) = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0} = \text{const.},$$

т.е. групповая скорость постоянна.

Если учесть квадратичный член в разложении, т.е.

$$\omega(k) = \omega_0 + \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0} (k - k_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\omega}{dk^2} \right)_{k=k_0} (k - k_0)^2 + \dots,$$

то тогда выражение для

$$u = \left(\frac{d\omega}{dk} \right) = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\omega}{dk^2} \right)_{k=k_0} 2(k - k_0) + \dots \neq \text{const.}$$

т.е. групповая скорость не постоянна. Групповая скорость разная на разных частотах, поэтому форма импульса меняется, спектральная ширина импульса Δk увеличивается.

- Разброс групповых скоростей $\Delta u \approx \left(\frac{d^2\omega}{dk^2} \right)_{k=k_0} (k - k_0) = \left(\frac{d^2\omega}{dk^2} \right)_{k=k_0} \Delta k$.

- $\frac{du}{d\lambda} = u^2 \frac{\lambda}{c} \frac{d^2 n}{d\lambda^2}$.

34. $k \cdot \hbar \omega = A + W_{\max}$, где параметр k – число фотонов, A – работа выхода, W_{\max} – максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов (при однофотонном характере поглощения не удастся преодолеть энергию связи, т.е. работу выхода электрона).

35. Частота Раби R – это частота осцилляций оптического электрона между резонансными состояниями.

36. $u_1^o = 1.9686 \cdot 10^{10}$ см/с, $u_1^e = 2.0402 \cdot 10^{10}$ см/с,
 $u_2^o = 1.9429 \cdot 10^{10}$ см/с, $u_2^e = 2.0067 \cdot 10^{10}$ см/с.

Групповые скорости определяются из уравнений Селлмейера, взяв производные $\frac{\partial n}{\partial \lambda}$. Затем по формуле рассчитываем групповые скорости. Откуда следует, что в KDP кристалле существует следующее соотношение между значениями групповых скоростей: $u_2^o < u_1^o < u_2^e < u_1^e$.

37. $u_1^o = 1.3044 \cdot 10^{10}$ см/с, $u_1^e = 1.3524 \cdot 10^{10}$ см/с,
 $u_2^o = 1.19832 \cdot 10^{10}$ см/с, $u_2^e = 1.20701 \cdot 10^{10}$ см/с.

Групповые скорости определяются из уравнений Селлмейера, взяв производные $\frac{\partial n}{\partial \lambda}$. Затем по формуле рассчитываем групповые скорости.

Откуда видно, что в LiNbO₃ кристалле существует следующее соотношение между значениями групповых скоростей: $u_2^o < u_2^e < u_1^o < u_1^e$.

38. Для KDP кристалла при $\tau = 1$ пс квазистатическая длина $l_v = 1.03516$ см и 2.07033 см при длительности импульса 2 пс. Используются следующие формулы: $v = \frac{1}{u_1^o} - \frac{1}{u_2^e}$, $l_v = \frac{\tau_1}{v}$, где τ_1 – длительность импульса основного излучения. Значения групповых скоростей рассчитаны в задаче 36. Отметим, что в KDP кристалле существует следующее соотношение между значениями групповых скоростей: $u_2^o < u_1^o < u_2^e < u_1^e$.

39. Для LiNbO₃ кристалла при $\tau = 1$ пс квазистатическая длина $l_v = 0.1620$ см и 0.3230 см при длительности импульса 2 пс. Используются следующие формулы: $v = \frac{1}{u_1^o} - \frac{1}{u_2^e}$, $l_v = \frac{\tau_1}{v}$, где τ_1 – длительность импульса основного излучения. Значения групповых скоростей рассчитаны в задаче 37. Отметим, что в LiNbO₃ кристалле существует следующее соотношение между значениями групповых скоростей: $u_2^o < u_2^e < u_1^o < u_1^e$.

40. Для KDP кристалла при $\tau = 1$ пс квазистатическая длина $l_v = 1.2221$ см для ое-е взаимодействия и для сравнения $l_v = 1.03516$ см для оо-е случая взаимодействия. При длительности импульса 2 пс длина $l_v = 2.4443$ см для ое-е взаимодействия и $l_v = 2.07033$ см для оо-е случая. Используются следующие формулы: $v = \frac{1}{u_1^o} - \frac{1}{u_2^e}$, $l_v = \frac{\tau_1}{v}$, где τ_1 – длительность импульса основного излучения. Значения групповых скоростей рассчитываются аналогично задачам 36. Отметим, что в KDP кристалле для ое-е взаимодействия существует следующее соотношение между значениями групповых скоростей: $u_1^o < u_2^e < u_1^e$.

41. Для LiNbO₃ кристалла в случае сравнения групповых скоростей u_1^o и u_2^e при $\tau = 1$ пс квазистатическая длина $l_v = 0.1123$ см и 0.225 см при длительности импульса 2 пс. В случае сравнения групповых скоростей u_1^o и u_1^e при $\tau = 1$ пс квазистатическая длина $l_v = 0.3676$ см и 0.7353 см при длительности импульса 2 пс. Используются следующие формулы: $v = \frac{1}{u_1^o} - \frac{1}{u_2^e}$, $l_v = \frac{\tau_1}{v}$,

где τ_1 – длительность импульса основного излучения. Значения групповых скоростей рассчитываются аналогично задачам 37. Отметим, что в LiNbO_3 кристалле для ое взаимодействия существует следующее соотношение между значениями групповых скоростей: $u_2^o < u_2^e < u_1^o < u_1^e$.

Таким образом, длина кристалла, на которой импульсы расходятся на величину, равную длительности импульса, т.е. квазистатическая длина при взаимодействии двух волн основного излучения разных поляризаций меньше, чем при взаимодействии волны основного излучения и гармоники. Отсюда разнесение импульсов происходит быстрее в первом случае взаимодействия, что ведет к прекращению процесса преобразования во вторую гармонику.

42. Для требуемого анализа необходимо использовать связь между функцией Уиттекера $M_{k,m}(x)$ и вырожденной гипергеометрической функцией $F(\alpha, \beta, x)$

$$M_{k,m}(x) = x^{\frac{1}{2}+m} e^{-\frac{x}{2}} {}_1F_1(m - k + \frac{1}{2}, 2m + 1, x).$$

Условием применимости решения в ПЗИ для процесса стационарной генерации суммарной частоты является

$$\begin{aligned} \sqrt{\Gamma_{10}\Gamma_{20}}z &< 0,84 && \text{при } \Delta=0 \text{ и} \\ \Gamma_{10}^2 + \Gamma_{20}^2 &> 4\sqrt{2}\Gamma_{10}\Gamma_{20} - \frac{\Delta^2}{4} && \text{при } \Delta \neq 0. \end{aligned}$$

43. Для этого необходимо использовать связь между функцией Уиттекера $M_{k,m}(x)$ и вырожденной гипергеометрической функцией $F(\alpha, \beta, x)$

$$M_{k,m}(x) = x^{\frac{1}{2}+m} e^{-\frac{x}{2}} {}_1F_1(m - k + \frac{1}{2}, 2m + 1, x).$$

Условием применимости ПЗИ для ГВГ являются

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\Gamma_0^2 z^2 &< 1 && \text{при } \Delta=0 \text{ и} \\ l_{\text{нл}} &> \frac{4}{\pi}l_{\Delta}, \quad (l_{\Delta} = \frac{\pi}{\Delta} - \text{когерентная длина}) && \text{при } \Delta \neq 0 \end{aligned}$$

справедливые для произвольных длин z . Полученные условия применимости в случае генерации второй гармоники совпадают с условиями при генерации суммарной частоты.

44. Для этого необходимо использовать связь между функцией Уиттекера $M_{k,m}(x)$ и вырожденной гипергеометрической функцией $F(\alpha, \beta, x)$

$$M_{k,m}(x) = x^{\frac{1}{2}+m} e^{-\frac{x}{2}} {}_1F_1(m - k + \frac{1}{2}, 2m + 1, x).$$

Условием применимости решения в ПЗИ для процесса стационарной генерации суммарной частоты является

$$\sqrt{\Gamma_{20}\Gamma_{30}}z < 0,84 \quad \text{при } \Delta=0$$

и

$$\Gamma_{30}^2 - \Gamma_{20}^2 - 4\sqrt{2}\Gamma_{20}\Gamma_{30} > \frac{\Delta^2}{4} \quad \text{при } \Delta \neq 0.$$

45. 10^{-11} .

Указание: использовать перевод единиц МВт/см² в В/см.

46. Мощность излучения второй гармоники возрастает в $4 \cdot 10^4$ раз.

47. $a_2(z) = |A_2(z)| = \sigma_2 a_1^2 \text{sinc} \frac{\Delta k z}{2}$, где $a_{1,2}(z)$ вещественные амплитуды волны накачки и второй гармоники в зависимости от пройденного пути z в нелинейной среде, σ_2 – коэффициент нелинейной связи, $\Delta k = k_2 - 2k_1$ – фазовая расстройка при генерации второй гармоники. В ПЗП $A_1(z) = a_1(z) \exp[i\varphi_1(z)] = \text{const.}$, т.е. $a_1(z) = a_1(z=0) = \text{const.}$, $\varphi_1(z) = \varphi_1(0) = \text{const.}$

48. $l_{coh} = 25$ мкм, мощность растет в 10^6 раз.

49. Квадратичную восприимчивость нелинейной среды $\chi^{(2)}$.

50.

$$\begin{aligned} \frac{a_1^2(z) - a_1^2(0)}{a_2^2(z) - a_2^2(0)} &= \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \approx \frac{\omega_1}{\omega_2}, \\ \frac{a_2^2(z) - a_2^2(0)}{a_3^2(z) - a_3^2(0)} &= -\frac{\gamma_2}{\gamma_3} \approx -\frac{\omega_2}{\omega_3}, \\ \frac{a_1^2(z) - a_1^2(0)}{a_3^2(z) - a_3^2(0)} &= -\frac{\gamma_1}{\gamma_3} \approx -\frac{\omega_1}{\omega_3}. \end{aligned}$$

Вывод: Приращения мощности волн на некотором пути в кристалле относятся как их частоты.

$$51. \frac{1}{\omega_1} \frac{dI_1}{dz} = \frac{1}{\omega_2} \frac{dI_2}{dz} = -\frac{1}{\omega_3} \frac{dI_3}{dz}.$$

Отношение интенсивности излучения, т.е. плотности потока энергии излучения к величине излучаемого фотона пропорционально плотности потока фотонов. Отсюда следует, что уменьшение количества фотонов на частоте ω_1 равно уменьшению количества фотонов на частоте ω_2 и равно росту числа фотонов на суммарной частоте.

52. На частоте ω_1 и ω_2 .

$$53. z_{opt} = \pi(m + \frac{1}{2}) / \sqrt{2\Gamma^2 + (\Delta k_1^{NL} + \Delta k_2^{NL} - \Delta k)^2 / 4}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \text{ где } \Gamma^2 = \gamma_1 \gamma_2 I_{10}, \quad \Delta k = k_2 - 2k_1, \quad \Delta k_1^{NL} = (2\gamma_{11} - \gamma_{21}) I_{10}, \quad \Delta k_2^{NL} = (2\gamma_{12} - \gamma_{22}) I_{20}.$$

54. При этих условиях выражение для λ' имеет вид: $\lambda''^2 = 2\Gamma^2 + \frac{(\Delta k_1^{NL} - \Delta k)^2}{4}$. Оптимальное значение линейной расстройки находим через максимумы функции $\text{sinc}^2 x$ (см. таблицу), так как при $I_{20} = 0$ эффективность преобразования $\eta_2 \sim \text{sinc}^2 \lambda' z$.

Таблица 1.

Максимумы функции $\text{sinc}^2 x$		
l	x_l	$\text{sinc}^2 x$
1	0	1
2	4.4934	0.0472
3	7.7253	0.0165

Из условия $(\lambda'' z)^2 = 2(\Gamma z)^2 + \frac{(\Delta k_1^{NL} - \Delta k)^2 z^2}{4} = x_l$ оптимальное значение линейной расстройки для получения центрального максимума функции равняется $\Delta k_{opt,1} = \Delta k_1^{NL} + 2\sqrt{2}\Gamma$, а для первого бокового максимума – $\Delta k_{opt,2} z = \Delta k_1^{NL} z + 2\sqrt{4.4934 - 2(\Gamma z)^2}$. Таким путем при необходимости можно определить оптимальные значения линейной расстройки для

второго и последующих боковых максимумов эффективности преобразования η_2 . Из сравнения полученных значений видно, что оптимальные значения линейных расстроек, соответствующих боковым максимумам, в отличие от $\Delta k_{opt,1}$, соответствующего центральному максимуму, зависят от длины нелинейной среды z . Из анализа следует, что в случае $2(\Gamma z)^2 \ll 1$ оптимальное значение линейной расстройки $\Delta k_{opt,1}$ практически полностью компенсирует нелинейную расстройку Δk_1^{NL} .

55. Для этого из выражения $(\lambda''z)^2 = 2(\Gamma z)^2 + \frac{(\Delta k_1^{NL} - \Delta k)^2 z^2}{4} = (\pi k)^2$, $k = 1, 2, \dots$ для периода пространственных биений получаем $(\Delta z)_{per} = \pi / \sqrt{2\Gamma^2 + (\Delta k_1^{NL} - \Delta k)^2 / 4}$. Откуда следует, что период пространственных биений амплитуды второй гармоники изменяется с интенсивностью накачки за счет подкоренного параметра Γ^2 и параметра $\Delta k_1^{NL} \sim I_{10}$. С ростом интенсивности накачки период пространственных биений $(\Delta kz)_{per}$ уменьшается.

56. Коэффициент усиления сигнальной волны

$\eta_1 = (\cosh^2 q'_1 z + |B_1 + P_2|^2 \sinh^2 q'_1 z / q'^2_1) \exp(-2\delta_1 z)$,
где

$$q'^2_1 = \Gamma_3^2 - \Gamma_2^2 - \frac{(\Delta + \Delta^{NL})^2}{4}, \quad \Delta^{NL} = g_1 I_{10} + g_2 I_{20} + g_3 I_{30}, \quad P_2 = -i(\Delta + \Delta^{NL})/2.$$

Здесь Δ^{NL} – нелинейная фазовая расстройка, зависящая от интенсивностей взаимодействующих волн. Фазовые сдвиги, вызванные нелинейной фазовой расстройкой Δ^{NL} , зависят, как видно из его выражения, от уровней интенсивности I_{10} , I_{20} и I_{30} в то время как линейная фазовая расстройка Δ не зависит от интенсивностей взаимодействующих волн, ее величина постоянна по всей длине нелинейной среды. В начальный момент параметрического взаимодействия, когда амплитуды холстой и сигнальной волн малы, их вклад в нелинейную рас-

стройку мал. С ростом амплитуд этих волн величина нелинейной расстройки растёт, что влияет на оптимальное фазовое соотношение.

$$57. \Delta\omega = \frac{\pi}{L \left(\frac{dk_2\omega}{d\omega} - \frac{dk\omega}{d\omega} \right)}.$$

58. В случае ГВГ $I_1(z) + I_2(z) = I_1(0) = const$. Суммарная мощность волны основного излучения и гармоники в любом сечении нелинейной среды (при любом значении пространственной координаты z) равна мощности излучения на входе в среду, т.е. выполняется закон сохранения энергии при ГВГ.

59. При синхронизме параболическая зависимость интенсивности ВГ наблюдается от длины z : $I_2 \sim z^2$, так как в выражении для интенсивности можно выделить неопределенность первого рода (или первый замечательный предел) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, где $x = \Delta k \cdot z/2$. Физически при синхронизме обеспечивается максимальный эффект от интерференции волн, переизлучаемых в разных точках среды. Длина когерентности $z_{coh} = \pi/\Delta k$ при синхронизме Δk достигает бесконечно больших значений. Тогда перекачка энергии от основной волны излучения в гармонику осуществляется на всем протяжении распространения основного излучения в среде.

60. На левом рисунке генерация происходит при существовании волновой расстройки, образовавшаяся волна гармоники не в фазе с основной волной – максимумы осцилляций не совпадают. На правом генерация происходит при выполнении условия синхронизма. Видно, что в любой точке среды, на любой длине z максимумы осцилляций как основной волны, так и волны гармоники совпадают.

61. Левый при $z = const$. (интенсивность ВГ от расстройки меняется как $\text{sinc}^2 x$), а правый при $\Delta k = const$. (интенсивность ВГ от расстройки меняется как $\sin^2 x$).

62. $L_{eff} = L \cdot \cos \theta$ - эффективная длина кристалла – длина той части кристалла, где происходит преобразование частоты

излучения. Отметим, что L_{eff} может быть меньше из-за сноса энергии излучения гармоники.

$$63. \Delta k = (n_{2\omega} - n_{\omega}) \frac{2\omega}{c}, L_{eff} = L \cdot \cos \theta,$$

$$I_2 \sim \sin^2 \frac{\Delta k L_{eff}}{2} = \sin^2 \left[\frac{(n_{2\omega} - n_{\omega}) L \omega \cos \theta}{c} \right].$$

$$64. \Delta \omega = \pm \frac{\pi}{L} \left(\frac{\partial k(2\omega)}{\partial \omega} - \frac{\partial k(\omega)}{\partial \omega} \right)^{-1}.$$

65. $I_1 = 100 \text{ МВт/см}^2$ соответствует $A_1 \sim 10^3 \text{ СГСЭ}$. Отсюда получаем $\eta_2 = 10^{-11}$.

Указание: перевод интенсивности I_1 в амплитуду волны A_1 :
 $A_1, \text{ В/см} = 27,5 \sqrt{I_1, \text{ Вт/см}^2} = 27,5 \cdot \sqrt{100 \cdot 10^6, \text{ Вт/см}^2} = 27,5 \cdot 10^4$
 $\text{В/см} = 27,5 \cdot 10^4 \cdot 300 \cdot \text{В/см} / 300 = 917 \text{ СГСЭ} \sim 10^3 \text{ СГСЭ}$.

$$66. \Delta k \cdot l_{coh} = 17.3 \text{ мкм} \quad (l_{coh} = \frac{\lambda_{\omega}}{4[n(2\omega) - n(\omega)]}).$$

67. $l_{coh} = \frac{1.06 \text{ мкм}}{4[1.4938 - 1.4705]} = 11.37 \text{ мкм}$. На рис. 71 показана экспериментально полученная зависимость. Изменение оптической толщины кристалла осуществляется за счет углового поворота кристалла.

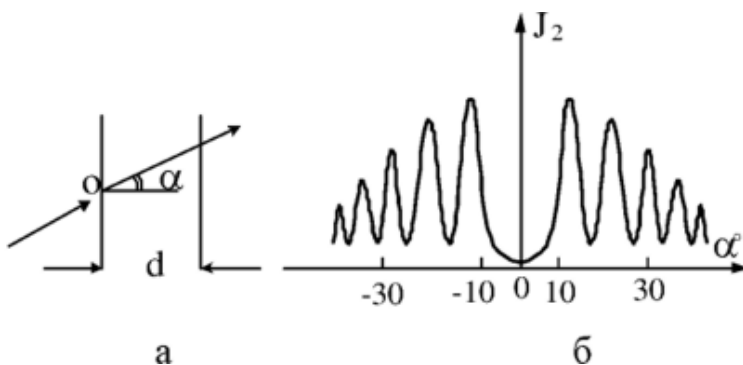


Рис. 71. Биения Мейкера. Изменение оптической толщины кристалла достигается угловым поворотом кристалла.

68. 8.18 мкм.

69. В неколлинеарном случае распространения трех волн

условие фазового синхронизма $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}_3$ эквивалентно условию $\omega_1 n_1 \vec{e}_1 + \omega_2 n_2 \vec{e}_2 = \omega_3 n_3 \vec{e}_3$, где \vec{e}_1, \vec{e}_2 и \vec{e}_3 – единичные векторы вдоль направления распространения волн, т.е. вдоль волновых векторов на соответствующих частотах, $n_j = n(\omega_j)$, $j = 1 \div 3$. Показатели преломления n_1, n_2 и n_3 зависят от направления распространения волн относительно оптической оси кристалла, а также от поляризации волны (обыкновенная или необыкновенная волна) и частоты. Условие синхронизма в векторной форме эквивалентно двум скалярным уравнениям

$$\begin{aligned}\omega_1 + \omega_2 &= \omega_3, & \omega_1 n_1 \sin \theta_1 &= \omega_2 n_2 \sin \theta_2, \\ \omega_1 n_1 \cos \theta_1 + \omega_2 n_2 \cos \theta_2 &= \omega_3 n_3,\end{aligned}$$

где углы θ_1, θ_2 и θ_3 – углы, образуемые волнами на частотах ω_1, ω_2 с волной на частоте ω_3 .

70. Векторное уравнение закона сохранения импульса в неколлинеарном случае распространения преобразуется к следующим двум скалярным уравнениям:

$$\begin{aligned}n_o^\omega \sin \theta_1 &= n_e^\omega(\theta + \theta_2) \cdot \sin \theta_2, \\ n_o^\omega \cos \theta_1 + n_e^\omega(\theta + \theta_2) \cdot \cos \theta_2 &= 2n_e^{2\omega}(\theta),\end{aligned}$$

где
$$n_{\omega e}(\theta + \theta_2) = \frac{n_o^\omega n_e^\omega}{\sqrt{n_o^{\omega^2} - (n_o^{\omega^2} - n_e^{\omega^2}) \cos(\theta + \theta_2)}},$$

$$n_{2\omega e}(\theta) = \frac{n_o^{2\omega} n_e^{2\omega}}{\sqrt{n_o^{2\omega^2} - (n_o^{2\omega^2} - n_e^{2\omega^2}) \cos \theta}}.$$

71. 49.9°

72. 41.12°

73. 6.56 угловых минут.

74. Для значения косинуса угла синхронизма $\cos \theta_s$ получается больше 1, что свидетельствует о невозможности такого типа взаимодействия при ГВГ.

75. 81.16°.

76. Из построения волновых векторов на рис. 16 видно, что ОА

– это направление скалярного оо-е синхронизма по отношению к оптической оси кристалла oz , OB – направление векторного оо-е синхронизма.

77. На рис. 17 слева OB – направление векторного ое-е синхронизма. Справа OA -направление оее, а OA' -оое синхронизма.

78. См. рис. 16.

79. 39.55° . На рис. 72 показан луч, падающий и преломляющийся в кристалле.

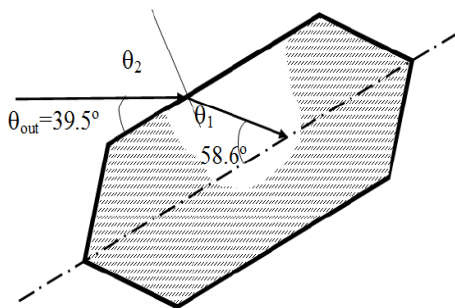


Рис. 72. На KDP кристалл естественной огранки падает излучение Nd:YAG лазера.

80. Из закона Снеллиуса при заданных параметрах задачи выполняется условие полного внутреннего отражения ($\sin \theta_2 > 1$). Любой луч, распространяющийся внутри кристалла под углом θ_s , не может покинуть кристалл через большую грань. Аналогично никакой внешний луч, входящий через входную большую грань, не может распространяться под требуемым углом. Необходимо выполнение определенного среза кристалла.

$$\mathbf{81.} \Delta k_{oeo} = \frac{\omega}{c} (n_o^\omega)^3 [(n_o^{2\omega})^{-2} - (n_e^{2\omega})^{-2}] \sin 2\theta_s \cdot \Delta\theta.$$

$$\mathbf{82.} \Delta k_{eeo} = \frac{\omega}{c} (n_o^{2\omega})^3 [(n_e^\omega)^{-2} - (n_o^\omega)^{-2}] \sin 2\theta_s \cdot \Delta\theta.$$

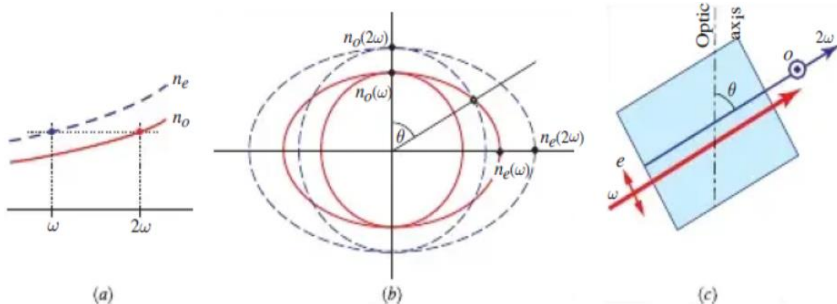


Рис. 73. Случай еее взаимодействия в положительном кристалле. Не-
обыкновенный луч распространяется под углом θ к оптической оси.

83.
$$\frac{\Delta k_{eoo}^{II type}}{2} = \Delta k_{eoo}^{I type} = \frac{\omega}{c} (n_o^{2\omega})^3 [(n_e^\omega)^{-2} - (n_o^\omega)^{-2}] \sin 2\theta_s \cdot \Delta\theta.$$
 См. рис. 19.

84.
$$\Delta k \approx \frac{2\omega}{c} (n_o - n_e) \sin 2\theta_s \cdot \Delta\theta.$$

85.
$$\Delta k_{eoo} = \frac{2\omega}{c} (n_o^{2\omega})^3 [(n_e^\omega)^{-2} - (n_o^\omega)^{-2}] \cdot \Delta\theta^2 \text{ (Рис. 21).}$$

86.
$$\Delta k_{oeo} = \frac{\Delta k_{ooo}}{2} = \frac{\omega}{c} (n_o^\omega)^3 [(n_o^{2\omega})^{-2} - (n_e^{2\omega})^{-2}] \cdot \Delta\theta^2.$$

87.
$$\Delta k_{ooo} = \frac{2\omega}{c} (n_o^\omega)^3 [(n_o^{2\omega})^{-2} - (n_e^{2\omega})^{-2}] \cdot \Delta\theta^2.$$

88. См. формулу.

89. В кристаллах, при угле синхронизма отличным от 90° , $\Delta k \sim \Delta\theta$, а в кристаллах с 90° синхронизмом $\Delta k \sim \Delta\theta^2$. Из сравнения следует, что при 90° синхронизме диапазон изменения $\Delta\theta$ шире, допустимый угол расходимости больше. В кристаллах, где отсутствует 90° синхронизм, небольшие изменения угла линейно влияют на расстройку Δk . Для получения таких же изменений волновой расстройки Δk в кристаллах с 90° синхронизмом отклонение от направления синхронизма должно быть квадратично больше значения угла в линейном случае. Поэтому кристаллы с 90° синхронизмом менее критичны к выполнению условия синхронизма.

90. (Цернике, стр 26)

- свет надо разложить на два луча, линейно поляризованных в разрешенных направлениях,
- на выходе эта световая волна уже не будет линейно поляризована.

$$91. v_e(\theta) = \frac{c}{n^e(\theta)} = \frac{c}{n_o n_e} \sqrt{n_o^2 - (n_o^2 - n_e^2) \cos^2 \theta}$$

92. 4 направления (см. рис. 74).

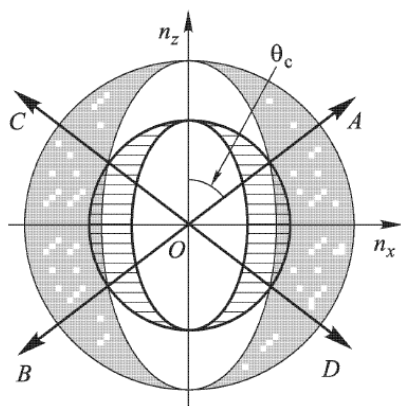


Рис. 74. Сечения индикатрис показателя преломления отрицательного одноосного кристалла.

93. Для изотропной среды $\sin i = n \cdot \sin \theta$, где θ – угол преломления, т.е. угол между нормалью и преломленным лучом. Для анизотропной среды – $\sin i = n(\theta) \cdot \sin \theta$.

Здесь учитывается зависимость показателя преломления от угла преломления.

$$94. W_e = \frac{1}{8\pi} (\varepsilon_{11} E_1^2 + \varepsilon_{22} E_2^2 + \varepsilon_{33} E_3^2 + 2\varepsilon_{23} E_2 E_3 + 2\varepsilon_{13} E_1 E_3 + 2\varepsilon_{12} E_1 E_2) = \frac{1}{8\pi} (\varepsilon_x E_x^2 + \varepsilon_y E_y^2 + \varepsilon_z E_z^2).$$

95. Так как, согласно правилу Миллера, материалы, обладающие высокой нелинейностью, также обладают высоким показателем преломления. По этой причине нелинейные характеристики выбираемого материала должны быть оценены по

параметру d^2/n^3 .

96. В отсутствие резонанса тензор симметричен относительно перестановки двух последних индексов $\chi_{ikj}^{(2)}$. В случае ГВГ, используя сокращенную запись, тензор симметричен по последним двум индексам, поэтому число падает до 18. При выполнении условия Клейнмана (индексы тензора можно переставлять независимо от частот) число независимых компонент уменьшается до 10. Для многих структур это число значительно меньше, что связано с симметрией кристалла. Так в дигидрофосфате калия (KH_2PO_4) число независимых компонент равно 3.

97. $0.024782 \text{ см}^{-1} \cdot \text{угл.мин.}^{-1}$.

98. Для $\lambda=1.064 \text{ мкм}$ $n_o=2.232$, $n_e=2.156$; для $\lambda=0.6328 \text{ мкм}$ $n_o=2.286$, $n_e=2.203$. Отрицательный кристалл.

99. Для $\lambda=1.064 \text{ мкм}$ $n_o=1.494347$, $n_e=1.460325$; для $\lambda=0.532 \text{ мкм}$ $n_o=1.512974$, $n_e=1.470974$. Отрицательный кристалл.

100. Для скалярного оо-е взаимодействия в KDP кристалле угол синхронизма $\theta_s=44.4^\circ$, в ADP кристалле $\theta_s=76.6^\circ$.

101. Условие фазового синхронизма для внутреннего угла синхронизма при ГВГ в кристалле с квадратичной нелинейностью для оо-е скалярного взаимодействия первого типа имеет вид: $n_o^\omega = n_e^{2\omega}(\theta_{s, \text{internal}})$. Согласно закону Снеллиуса для обыкновенного луча $\frac{\sin \theta_{\text{external}}}{\sin \theta_{\text{internal}}} = \frac{n_{\text{internal}}}{n_{\text{external}}} = n_{\text{internal}} = n_o(\lambda)$ (полагая падает из воздуха), для необыкновенного луча $\frac{\sin \theta_{\text{external}}}{\sin \theta_{\text{internal}}} = n_e(\lambda, \theta)$. Подставляя данные по показателям преломления в условие синхронизма, находим внутренний угол синхронизма $\theta_{s, \text{internal}}$, а затем и $\theta_{s, \text{external}}$. При условии синхронизма

$$n_o^\omega = n_e^{2\omega}(\theta_{s, \text{internal}})$$

$$= \frac{n_o^{2\omega} n_e^{2\omega}}{\sqrt{n_o^{2\omega^2} + (n_e^{2\omega^2} - n_o^{2\omega^2}) \cos^2 \theta_{s, \text{internal}}}},$$

находим отсюда выражение для $\sin^2 \theta_{s, internal}$. А затем $\sin \theta_{external} = n_o(\lambda) \cdot \sin \theta_{internal}$. Получаем $\theta_{s, external} =$

$$\arcsin \sqrt{[(n_o^{2\omega})^2 - (n_o^\omega)^2] / \left(\frac{n_o^{2\omega}}{n_e^{2\omega}}\right)^2 - 1}.$$

102. Условие синхронизма для параметрического взаимодействия для его скалярного синхронизма имеет вид $\Delta k = 2\pi \left(\frac{n_e^p(\theta)}{\lambda_p} - \frac{n_o^s}{\lambda_s} - \frac{n_e^i(\theta)}{\lambda_i} \right) = 0$. Из уравнения эллиптического сечения индикатрисы показателя преломления находим:

$$n_e^i(\theta) = \frac{n_o^i n_e^i}{\sqrt{n_o^{i^2} + (n_e^{i^2} - n_o^{i^2}) \cos^2 \theta}},$$

$$n_p^e(\theta) = \frac{n_{op} n_{ep}}{\sqrt{n_o^{p^2} + (n_e^{p^2} - n_o^{p^2}) \cos^2 \theta}}.$$

Значения показателей преломления определяются из уравнений Селлмейера. Подставляя данные по показателям преломления в условие синхронизма, находим внутренний угол синхронизма $\theta_{s, internal}$.

103. Производная выражения для фазовой расстройки Δk по углу θ имеет вид:

$$\left. \frac{\partial \Delta k}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_s} = 2\pi \sin \theta \cos \theta \left[\frac{n_o^p (n_e^{p^2} - n_o^{p^2})}{\lambda_p (\sqrt{n_o^{p^2} + (n_e^{p^2} - n_o^{p^2}) \cos^2 \theta})^3} - \frac{n_o^i (n_e^{i^2} - n_o^{i^2})}{\lambda_i (\sqrt{n_o^{i^2} + (n_e^{i^2} - n_o^{i^2}) \cos^2 \theta})^3} \right] \Bigg|_{\theta=\theta_s}$$

104. Для кристалла KDP была получена следующая величина углового дисперсионного коэффициента первого порядка, равная $0.955780 \text{ см}^{-1} \text{ угл. мин}^{-1}$.

Таблица 3

Кристалл	Тип синхронизма	λ , мкм	d_{36} , пм/В	θ_s , градус	Угловой дисперсионный коэффициент первого порядка, см ⁻¹ угл. мин ⁻¹
KDP	ооо	1,06	0,47	41,5	0.95570

105. Из сравнения двух зависимостей следует, что $\text{Zn}_{1-x}\text{Mg}_x\text{Se}$ кристалл менее критичен к выставлению угла синхронизма. Пологий характер зависимости для этого кристалла свидетельствует о некритичности данного кристалла к отклонениям от угла синхронизма. В случае второго CdGeAs_2 кристалла небольшие изменения фазовой расстройки приводят к существенным изменениям в эффективности преобразования. Как и следовало ожидать, зависимости имеют немонотонный характер. С ростом потерь эффективность преобразования падает. Сравнение сплошных кривых также свидетельствует, что при оптимальных параметрах задачи большая (в 22,5 раза) эффективность преобразования во вторую гармонику достигается в кристалле CGA, чем в кристалле ZGP. При одинаковых расстройках большая эффективность преобразования в кристалле CGA достигается быстрее, т.е. на меньших значениях когерентной длины кристалла, чем в случае кристалла ZGP. Таким образом, в кристаллах, где квадратичная нелинейность выше, интенсивности накачки, требуемые для проявления одинаковой нелинейной поляризации, имеют меньшие значения, что согласуется с экспериментальными результатами.

106.

- Эффективность возрастает в $0.48/0.06 = 8$ раз.
- Аргумент функции $\text{sinc}\lambda l$ достигает максимума при $(\lambda l)_{opt}$, где $l = l_{coh}$, $\lambda^2 = 2\Gamma^2 + \frac{\Delta^2}{4}$ при $\delta_{1,2}=0$. С увеличением расстройки параметр λ растет, тогда $l = l_{coh}$ должна уменьшаться, чтобы $(\lambda l)_{opt}$ выражение оставалось неизменным. С

физической точки зрения увеличение фазовой расстройки ведет к рассогласованию волн, отсюда когерентная длина уменьшается.

- Для кристалла CGA была получена следующая величина углового дисперсионного коэффициента первого порядка, равная $0.07382 \text{ см}^{-1} \text{ угл. мин}^{-1}$.

Таблица 4

Кристалл	Тип синхронизма	λ , мкм	d_{36} , пм/В	θ_s , градус	Угловой дисперсионный коэффициент первого порядка, $\text{см}^{-1} \text{ угл. мин}^{-1}$
CGA	еео	10,60	236,00	32.5	0.07382

107.

Таблица 6

x	λ мкм	Тип взаимодействия	θ_s , градус	Угловой дисперсионный коэффициент первого порядка, $\text{см}^{-1} \text{ угл. мин.}^{-1}$
0	9.31	ооо	47.9672	0.062275
0	9.55	ооо	49.1893	0.047185
0	9.64	ооо	49.6679	0.046629
0.1	9.31	ооо		
0.1	9.55	ооо	54.1457	0.43463
0.1	9.64	ооо	54.7939	0,042725
0.2	9.31	ооо		
0.2	9.55	ооо	51.62306	0.052303
0.2	9.64	ооо	52.2384	0.051536
0.4	9.31	ооо		
0.4	9.55	ооо	57.3614	0.050338
0.4	9.64	ооо	58.17535	0.049188
1.0	9.31	ооо		
1.0	9.55	ооо	55.70351	0.079066
1.0	9.64	ооо	56.56404	0.077336

108. Для кристалла ZGP была получена величина углового дисперсионного коэффициента первого порядка, равная $0.02082 \text{ см}^{-1} \text{ угл. мин}^{-1}$.

Таблица 2

Кристалл	Тип синхронизма	λ , мкм	d_{36} , пм/В	θ_s , градус	Угловой дисперсионный коэффициент первого порядка, $\text{см}^{-1} \text{ угл. мин}^{-1}$
ZGP	eeo	10,60	75,00	76,0	0.02082

109. Для кристалла $\text{AgGa}_{0.6}\text{In}_{0.4}\text{Se}_2$ была получена следующая величина углового дисперсионного коэффициента первого порядка, равная $0.006216 \text{ см}^{-1} \text{ угл. мин}^{-1}$.

Таблица 8

Кристалл	Тип синхронизма	λ , мкм	d_{36} , пм/В	θ_s , градус	Угловой дисперсионный коэффициент первого порядка, $\text{см}^{-1} \text{ угл. мин}^{-1}$
$\text{AgGa}_{0.6}\text{In}_{0.4}\text{Se}_2$	ооe	9,55	41,00	83.4	0.006216

110. $\theta_s = 65.0^\circ$, $\Delta\theta = 0.024782 \text{ угл. мин.}$

111. $\theta_s = 74.52^\circ$, $\Delta\theta = 0.0323 \text{ угл. мин.}$

112. Для определения оптимальной длины кристалла, т.е. когерентной длины, а необходимо получить аналитическое выражение для производной интенсивности ВГ по длине l кристалла, приравняв которое нулю получим следующее выражение

$$\ell_{opt} = \text{atan} \left[\frac{2\Gamma^2 + \Delta^2/4}{\delta_2} \right] / \left[2\Gamma^2 + \frac{\Delta^2}{4} \right]$$

113. Для определения оптимальной длины кристалла получаем аналитическое выражение для производной интенсивности ВГ по длине l кристалла, приравняв которое нулю получим следующее выражение

$$\ell_{opt} = \frac{\operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{3\Gamma^2 - \frac{(\delta_3 - 3\delta_1)^2}{4}}}{(\delta_3 + 3\delta_1)/2}\right)}{\sqrt{3\Gamma^2 - \frac{(\delta_3 - 3\delta_1)^2}{4}}}$$

114. В плоскости ХУ этот кристалл является отрицательным одноосным кристаллом. В этой плоскости углы обозначаем через φ . Записываем уравнение эллипса для x и y компонент показателя преломления. Далее стандартным путем решаем уравнение относительно $n_e(\varphi)$. Подставляем в условие синхронизма и находим для отрицательного двухосного кристалла угол синхронизма, равный $\varphi_s = 42.40^\circ$.

115. для реализации фазового согласования в кристалле LiInSe_2 для случая ПГС на холостой волне должно выполняться равенство $\frac{1}{\lambda_p^e} = \frac{1}{\lambda_i^e} + \frac{1}{\lambda_s^o}$. Откуда можем определить соответствующее значение длины сигнальной волны, равное 1.2723 мкм. Значения для показателей преломления, а также угол φ_s были рассчитаны и приведены в таблице 9.

Таблица 9

Тип волны	λ , мкм	n_x	n_y	n_z	$n^e(\varphi)$	d_{eff} , пм/В	Тип синхронизма
накачка (p)	1.064	2.29023	2.330345	2.33898	2.31228	10.6	eoe
сигнальная (s)	1.2723	2.27697	2.314298	2.32330	2.32330	10.6	
холостая (i)	6.5	2.22844	2.260755	2.27043	2.25526	10.6	

116. $l_{opt} = \arctan(\lambda/\delta_2)/\lambda$.

117. При концентрации ZnO в матрице PMMA, равной $\%wt_{ZnO}=16\%$ эффективную толщину можно менять в диапазоне 27-32 нм, а при $\%wt_{ZnO}=7\%$ эффективная толщина l_{eff} меняется в диапазоне 10-13 нм (рис. 75).

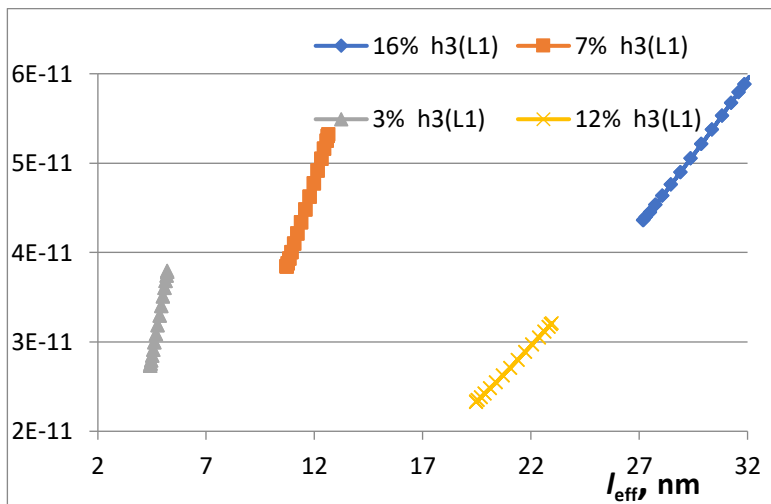


Рис. 75. Эффективность преобразования при разных толщинах.

118. В плоскости XZ этот кристалл является отрицательным одноосным кристаллом (при $\Omega > \theta = 12^\circ$). Записываем уравнение эллипса. Далее стандартным путем решаем уравнение и подставляем решение в условие синхронизма и находим угол между оптической осью и Z осью. Расчеты дают Ω для сравнения $\Omega^{\text{theor}}/\Omega^{\text{exp}}$ для данной геометрии кристалла ($\theta = 12^\circ$).

119. $\lambda_s = 1.274479$; $\theta_s = 49.95^\circ - 0.21081 \text{ см}^{-1} \text{ угл. мин.}$

Указание: условие фазового синхронизма применять для внутреннего угла синхронизма.

120. λ_s для сигнальной волны находим из соотношения

$$\frac{1}{\lambda_p^e} = \frac{1}{\lambda_i^e} + \frac{1}{\lambda_s^o}$$

Таблица 10

Кристалл	λ , мкм	n_o^ω	n_e^ω	Тип синхронизма	d_{eff} , пм/В	Угловой дисперсионный коэффициент второго порядка, см ⁻¹ угл. мин. ⁻²	θ_s , градус
Hg _{0.7} Cd _{0.3} Ga ₂ S ₄	1.064 (pump)	2.430288	2.39899	еоо	24.94	0,0000634955	90
Hg _{0.7} Cd _{0.3} Ga ₂ S ₄	1.5772 (signal)	2.405065	2.367763	еоо			
Hg _{0.7} Cd _{0.3} Ga ₂ S ₄	3.27 (idler)	2.386262	2.35255	еоо			

Указание: Расчет необходимо проводить для двух проходов резонатора волной накачки.

121. Поставленная задача решается со следующими граничными условиями:

$$A_s^-(z = d) = A_s^+ \cdot e^{-i2k_s d} \cdot R_s;$$

$$A_s^+(z = 0) = A_o + A_{so}^- \cdot R_{so},$$

$$A_{p,a}^+(z = 0) = A_{p,o,a o}$$

где R_{so} , R_s – комплексные коэффициенты отражения от левого и правого зеркал соответственно.

122. Граничные условия при генерации третьей гармоники во внешнем резонаторе имеют вид:

$$A_3^-(d) = R_3 A_3^+(d) \exp(-i2k_3 d),$$

$$A_1^+(0) = A_{10},$$

$$A_3^+(0) = R_{30} A_3^-(0),$$

$$A_1^-(d) = 0$$

123 В. случае оое взаимодействия основная волна накачки является обыкновенной волной, а волна гармоники – необыкновенной волной. Призма Глана – это две одинаковые призмы, выполненные из сильно двупреломляющего материала. Угол при вершине призмы выбирается с тем расчетом, чтобы при нормальном падении излучения на входную грань призмы обыкновенная волна испытывает полное внутреннее отражение от наклонной грани, а необыкновенная волна не испытывает полного внутреннего отражения. В результате обыкновенная волна на частоте ω_1 не проходит через призму. Как отмечено выше, прошедший пучок соответствует необыкновенной волне, т е волне второй гармоники, которая во втором нелинейном кристалле играет роль накачки для четвертой гармоники.

124. Оптимальная длина кристалла определяется выражением:

$$l_3^{opt} = \frac{1}{\lambda_3} \operatorname{atan} \frac{\lambda_3'}{\delta_5}.$$

125. В лазерах с непрерывной накачкой мощность выходного излучения меньше, чем внутри лазера, что связано с коэффициентом пропускания выходного зеркала лазерного резонатора. Так как интенсивность преобразования пропорциональна интенсивности основного излучения, то процесс преобразования внутри лазерного резонатора происходит гораздо эффективнее. Внутри лазерного резонатора изменение фазы волны сильнее сказывается на процессе преобразования, потери энергии, благодаря выходу части излучения нелинейно зависят от интенсивности света.

126. Измерения смещения минимумов или максимумов интенсивности второй гармоники позволяет непосредственно определить дисперсию показателя преломления исследуемой среды. Сравнивая интерференционные картины при наличии и отсутствии исследуемой среды, по смещению кар-

тины можно определить дисперсию показателя преломления исследуемой среды. Используя нелинейную зависимость интенсивности второй гармоники от разности фаз, можно повысить чувствительность интерферометра.

127. При оптимальных длинах первого и второго слоев для случая $\psi = 2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ оптимальное значение фазовой расстройки Δk_2 во втором слое, при котором эффективность преобразования максимальна, равно

$$\Delta k_{2,opt} = -\frac{\gamma'_1}{\gamma_1} \frac{4\Gamma_1}{\sqrt{2 + \left(\frac{\Delta k_1}{2\Gamma_1}\right)^2}}$$

128. Создается стопка слоев из кристаллических пластинок, соседние слои которых сориентированы друг относительно друга на 180° и имеют толщину равную когерентной длине. В результате на границе слоев происходит компенсация накопленной фазовой расстройки и вновь выполняется условие фазового согласования.

129. По мере распространения излучения в РДС структуре происходит перекачка энергии основного излучения в гармонику. В ПЗП длина доменов постоянна, так как в этом приближении не учитывается истощение волны накачки. В ПЗИ $l_{1,coh} = \frac{\arctg(\lambda_1/\delta_2)}{\lambda_1}$, где $\lambda = \sqrt{2\Gamma_1^2 + \frac{\Delta k^2}{4}}$, $\Gamma_1^2 = \gamma_1\gamma_2 I_{10}$. С ростом номера домена входное значение интенсивности накачки в каждый домен падает, что не учитывается в ПЗП. Если на входе в первый домен входное значение интенсивности накачки равно I_{10} , то на входе во второй домен это значение уже меньше, чем I_{10} и равно выходной интенсивности накачки на выходе первого домена с точностью до фазового члена. Отсюда значение параметра Γ_1^2 для второго домена уменьшается. Это ведет к росту когерентной длины.

130. ГВГ (кривая 2) и ГТГ (кривая 1) в РДС структурах.

$$131. \Delta k_{opt} = 2\lambda \sqrt{\frac{\sin \lambda l_2 + \frac{\lambda l_2}{4} \cos \lambda l_2}{\sin \lambda l_2 - \lambda l_2 \cos \lambda l_2}}$$

132. Из сравнения кривых 1 и 2 рис. 46 видно, что для параметрического усиления важно начальное значение интенсивности на низкой частоте I_{10} . Чем выше I_{10} , тем эффективнее идет процесс параметрического усиления. Далее анализ поведения кривых 2-5 показывает, что присутствие входной волны на суммарной частоте I_{30} делает процесс усиления на высокой частоте более эффективным.

133. Когерентная длина четвертого домена определяется выражением

$$l_{4,opt} = \pi / \left[2 \sqrt{\Gamma_2^2 - \frac{(\delta_3 - \delta_1 - \delta_2 - i\Delta k_4)^2}{4}} \right].$$

Как видно $l_{4,opt}$ зависит от интенсивности накачки I_{20} , потерь δ_j и Δk_4 . С увеличением этих параметров оптимальная длина домена уменьшается.

$$134. l_{1,opt} = \pi / \left[2 \sqrt{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 - \frac{(\delta_3 - \delta_1 - \delta_2 - i\Delta k_1)^2}{4}} \right].$$

Как видно когерентная длина зависит от интенсивностей волны накачки I_{20} , сигнальной волны I_{10} , от фазовой расстройки и потерь в первом домене.

135. В фазовое соотношение входят волновая расстройка Δk и набег фаз для каждой волны при отражении от правого зеркала 2.

136. Благодаря выполнению условия квазисинхронизма для первых четырех доменов, эффективность преобразования плавно нарастает до выхода волн из структуры (кривые 1-4). Но при обратном распространении волн в четвертом домене (т.е. при распространении в пятом домене) наблюдается спад зависимости (пунктирная кривая 5), что связано с невыполнением условия квазисинхронизма на границе между четвертым и пятым доменами. Однако приобретённый фазовый

сдвиг можно скомпенсировать сдвигом фаз взаимодействующих волн при их отражении от зеркала 2. Это можно осуществить подбором коэффициентов отражения зеркала 2. В результате можно добиться дальнейшего роста эффективности преобразования (сравнить сплошную и пунктирную кривые 5). Данный рост эффективности продолжается по мере распространения в 5, 6 и т.д. доменах (сравнить сплошные кривые 5 и 6). Практически важный вывод, следующий из анализа поведения кривых $\eta_3(l_j)$, заключается в том, что с ростом числа доменов крутизна зависимостей уменьшается. Другими словами, процесс преобразования частоты достигает насыщения. Дальнейший рост числа доменов ведет к незначительному росту эффективности преобразования частоты. Уже после малого числа (четырех) доменов эффективность преобразования значительна. Отсюда высокие значения η_3 можно получить, не прибегая к большому числу слоев.

137. Входное значение комплексной амплитуды волны основного излучения на входе в домен под номером n обозначается как $A_{\omega,n}(z=0)$. Это величина равняется выходному значению амплитуды данной волны из предыдущего домена, т.е. $A_{\omega,n-1}^{output}$. Еще необходимо учесть фазовый сдвиг на границе слоев для волны на частоте ω , который обозначается как $\exp(i\varphi_{\omega,n})$. В результате для обеих волн получаем следующие граничные условия:

$$A_{\omega,n}(z=0) = A_{\omega,n-1}^{output} \exp(i\varphi_{\omega,n}),$$

$$A_{3\omega,n}(z=0) = A_{3\omega,n-1}^{output} \exp(i\varphi_{3\omega,n}).$$

В случае отражения от правого зеркала необходимо учесть фазовый сдвиг соответствующей волны при отражении от зеркала. В системе, состоящей из 4х доменов, после четвертого домена происходит отражение от боковой стенки данного домена. В результате получаем:

$$A_{\omega}(z = 0) = A_{\omega}(l_4) \exp(i\varphi_{r,\omega}),$$

$$A_{3\omega}(z = 0) = A_{3\omega}(l_4) \exp(i\varphi_{r,3\omega}).$$

138. При больших мощностях накачки и длинах взаимодействия пороговая амплитуда накачки ($\delta_s = \delta_p + \delta_i$) имеет вид

$$A_{po,thresh}(l) = \sqrt{\frac{\Gamma_i^2 + \delta_s^2 + \Delta k^2/4}{\gamma_s \gamma_i}}. \text{ Видно, что с ростом потерь усло-}$$

вие параметрического усиления, т.е. $I_s(\ell) \geq I_{s0}$ выполняется при больших значениях амплитуды накачки.

139. Для расчета периодов модуляций $\Lambda_{2,3}^{eee}$ необходимо рассчитать показатели преломления n_{ω}^e , $n_{2\omega}^e$, $n_{3\omega}^e$ с точностью до шестого знака, используя уравнение и коэффициенты Сельмейера для данного кристалла. В результате имеем: $n_{\omega}^e = 2.149505$, $n_{2\omega}^e = 2.224952$, $n_{3\omega}^e = 2.38546$. Отсюда численные значения периодов модуляций равны: $\Lambda_2^{eee} = 7.051320$ мкм· M_2^{eee} и $\Lambda_3^{eee} = 1.910330$ мкм· M_3^{eee} . Для создания РДС-кристалла с постоянным периодом модуляции, т.е. $\Lambda_2^{eee} = \Lambda_3^{eee}$, проведем анализ различных сочетаний нечетных значений M_2^{eee} и M_3^{eee} от 1 до 35-го порядка квазисинхронизма. Было получено, что только для двух сочетаний значений пары M_2^{eee} и M_3^{eee} , (а именно для 3 и 11; и для 9 и 33) значения периодов модуляций $\Lambda_{2,3}^{eee}$ совпадают с точностью до единиц микрометра, различие в первом знаке после запятой ($\Lambda_2^{eee} - \Lambda_3^{eee} < 1$). Если в первом случае $\Lambda_2^{eee} = 21.15396$ мкм и $\Lambda_3^{eee} = 21.01363$ мкм ($\Lambda_2^{eee} - \Lambda_3^{eee} = 0.14033$ мкм), то для второго варианта значений пары $\Lambda_2^{eee} = 63.46188$ мкм и $\Lambda_3^{eee} = 63.04089$ мкм ($\Lambda_2^{eee} - \Lambda_3^{eee} = 0.42099$ мкм). Анализ показал, только в случае второго варианта происходит компенсация фазовой расстройки за счет модуляции знака нелинейной восприимчивости. Данный вариант и был реализован в эксперименте. Таким образом, периоды модуляций соответственно равны $\Lambda_2^{eee} = 63.46188$ мкм и $\Lambda_3^{eee} = 63.04089$ мкм.

140. Измерить энергию на выходе в зависимости от энергии

входных волн.

141. При встречном направлении волн, как показано на рисунке, и в случае вырождения волн по частотам условие фазового синхронизма выполняется автоматически, т.е. независимо от угла падения θ . Так как при встречном четырехволновом взаимодействии две волны накачки направлены противоположно друг к другу, а генерируемая обращенная волна с волновым вектором \vec{k}_4 распространяется в направлении навстречу сигнальной волне, то в вырожденном случае $\vec{k}_1 = -\vec{k}_2$, а $\vec{k}_4 = -\vec{k}_3$. Что приводит к автоматическому выполнению условия $\Delta\vec{k} = 0$.

142. $z_{opt} = \frac{1}{\alpha_4} \arctg \frac{\alpha_4 \lg \alpha_4 l - \delta}{\alpha_4 + \delta \lg \alpha_4 l}$, где $\alpha_4 = \sqrt{\gamma_3 \gamma_4 I_1 I_2 - \delta^2}$, γ_j – коэффициенты нелинейной связи, δ – коэффициент линейного поглощения, l – длина нелинейной среды.

143. $R = \frac{I_4(0)}{I_3(0)} = \gamma_4^2 I_1 I_2 \exp(-2\delta_2 l) \frac{\sin^2 \alpha_7 l}{(\delta \sin \alpha_7 l + \alpha_7 \cos \alpha_7 l)^2}$, где $\alpha_7 = \sqrt{\gamma^2 (I_1 I_3 + I_1 I_2 - I_2 I_3 - \delta^2)}$.

144. $\varphi_1(z) = \varphi_1(0) - \gamma I_{10} z - \frac{\Delta k \cdot z}{4} \frac{\Gamma^2}{\lambda^2} [1 - \text{sinc}(2\lambda z)]$, где $\lambda = \sqrt{2\Gamma^2 + \frac{\Delta k^2}{4}}$, $\Gamma^2 = \beta_1 \beta_2 I_{10}$, β_j – коэффициенты нелинейной связи в оптоволокне, $\Delta k = k_2 - 2k_1$. Полученный результат зависимости фазовой скорости волны накачки от интенсивности накачки I_{10} отражает тот факт, что показатель преломления среды зависит от интенсивности излучения, т.е. имеет место эффект самосоздействия световой волны в квадратично-нелинейной среде.

145. $L_{dis} \approx 5$ м для $\tau_1 = 10^{-12}$ с и $L_{dis} \approx 0.5$ мм для $\tau_1 = 10^{-14}$ с. Из полученных значений следует, что для пикосекундных импульсов эффект дисперсионного расплывания составляет около 5 м, что значительно больше размеров используемых в экспериментах кристаллов, длины которых порядка единиц см. В этом случае эффект еще не проявляется. Таким образом, при време-

нах $\tau_1=10^{-12}$ с, а тем более при еще больших длительностях, например, при наносекундных длительностях эффект дисперсионного расплывания можно не учитывать. Однако, уже при $\tau_1 \sim 10^{-13}$ с (когда можно показать, что $L_{dis} \approx 5$ см) и меньших временах, например, $\tau_1=10^{-14}$ с, когда длина дисперсионного расплывания составляет $L_{dis} \approx 0.5$ мм, эффект вносит существенные изменения в динамику нелинейного процесса. Отсюда для $\tau_1 < 10^{-13}$ с при исследовании нестационарного взаимодействия, включая фемтосекундные импульсы, необходимо учитывать эффект дисперсионного расплывания.

$$146. (\lambda^2)^{CFA} = \gamma_s \gamma_i I_{po}^2 - [(\delta_i - \delta_s)/2 - i(\Delta + \Delta_{SM}^{CFA} + \Delta_{XM}^{CFA})/2]^2, \\ \Delta_{XM}^{CFA} = -\gamma_i^s I_{so} - \gamma_s^i I_{io} - (\gamma_s^p + \gamma_i^p) I_{po}, \Delta_{SM}^{CFA} = -\gamma_s^s I_{so} - \gamma_i^i I_{io}.$$

Как видно в ПЗП нелинейная фазовая расстройка Δ_{SM}^{CFA} , не зависит от вклада интенсивной волны накачки, а в Δ_{XM}^{CFA} отсутствует вклад перекрестного взаимодействия волны накачки с сигнальной и холостой волнами. Это не позволяет получить полную картину взаимодействия оптических волн в ПЗИ.

$$147. L_{optical} = 2.19 \text{ м.}$$

148. Фазовая самомодуляция приводит к уширению спектра, а дисперсия групповых скоростей приводит к расплыванию светового импульса. В режиме аномальной дисперсии в оптоволокне отрицательная частотная модуляция, из-за дисперсии групповых скоростей, ведет к сжатию импульса. В результате одновременного действия обоих эффектов в области аномальной дисперсии наблюдается компенсация уширения спектра его сжатием. Появляются одиночные импульсы – солитоны, распространяющиеся без деформации формы импульса. Исторический факт: в 1836 г. шотландский инженер-кораблестроитель Дж. Рассел заметил, что при резкой остановке баржи в Эдинбургском канале зарождается одиночный водяной холм, который продолжал свой путь по каналу без заметного изменения формы и скорости, которые сейчас известны как солитоны.

149. Эффективность нелинейного процесса в оптоволокне определяется произведением двух параметров $I \cdot L_{eff}$. Здесь интенсивность $I = I_0 \exp(-\alpha z)$, $I_0 = \frac{P}{\pi a^2}$, a радиус сердцевины оптоволокна, α – потери в среде, L_{eff} – эффективная длина взаимодействия. При малых потерях $I \cdot L_{eff} = \frac{P}{\alpha \pi a^2}$. Увеличением увеличением эффективной площади волокна можно понизить эффективность нелинейного процесса.

150. $\alpha = 1.259$ раз.

151. Разными длинами путей z в волокне.

152. Распространение оптических импульсов в волокне сопровождается различными нелинейными эффектами. Нелинейность приводит к тому, что скорость точки волны тем больше, чем ближе она к вершине импульса. Фронт волны становится круче, и волна имеет как бы опрокидывается. Дисперсия в среде наоборот приводит к расплыванию импульса. Эти два механизма деформируют волну в противоположных направлениях. И в какой-то момент они могут компенсировать друг друга.

153. $\delta\omega = \frac{4\pi}{\lambda\tau} L n_2 I_0 \cdot \frac{t}{\tau} \exp\left[-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2\right]$, где n_2 нелинейная добавка к показателю преломления, связанная с зависимостью n от интенсивности излучения, $n = n_0 + n_2 I$. Этот нелинейный эффект, называемый фазовой самомодуляцией, ведет к дополнительному фазовому набегу, который получает световой импульс при распространении по оптоволокну. Данный эффект приводит к симметричному спектральному уширению оптических импульсов. Для кварца $n_2 \approx 3.2 \cdot 10^{-20} \text{ м}^2/\text{Вт}$. Как видно из рис. 51 фазовая самомодуляция приводит к дополнительному сдвигу фазы, который зависит от интенсивности излучения, в то время как форма импульса не меняется. Зависимость фазового сдвига от времени приводит к дополнительному частотному сдвигу $\delta\omega$. Происходит смещение мгновенной оптической частоты от центральной несущей частоты ω_0 импульса,

что является причиной уширения спектра.

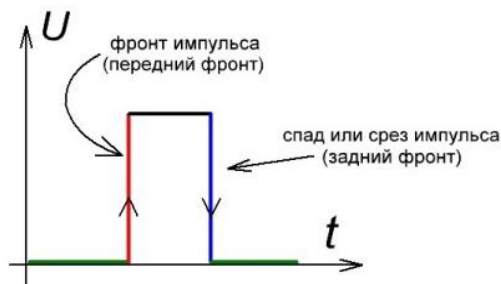


Рис. 76. Динамика изменения фронта волны.

На переднем фронте волны (рис. 76), где интенсивность волны растет, $\delta\omega < 0$, отсюда частота для переднего фронта импульса уменьшается, а значит соответствующая длина волны увеличивается. На заднем фронте импульса, т.е. на убывающей ветви интенсивности излучения производная отрицательна, отсюда частота заднего фронта увеличивается. Таким образом, благодаря самомодуляции, происходит изменение частоты импульса со временем, т.е. частотная модуляция импульса, растущая с увеличением длины распространения в оптоволокне. Все это ведет к уширению спектра по сравнению с его начальной спектральной формой.

$$154. \delta\omega = \frac{4\pi}{\lambda\tau} Ln_2 I_0 \cdot \left(\frac{t}{\tau}\right)^{2m-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\tau}\right)^{2m}\right]; \quad t/\tau = \sqrt[2m]{\frac{2m-1}{2m}}.$$

В супергауссовском импульсе также частотная модуляция проявляется на склонах импульса, она растет с крутизной импульса. Также наблюдается красное смещение ($\delta\omega < 0$) на переднем фронте импульса и синее смещение ($\delta\omega > 0$) на заднем фронте. С увеличением параметра m форма частотной модуляции меняется круче (см. рис. 77).

155. $0.62/0.27 = 2.3$ раза сильнее изменение фазы происходит в обычной среде, чем в оптоволокне.

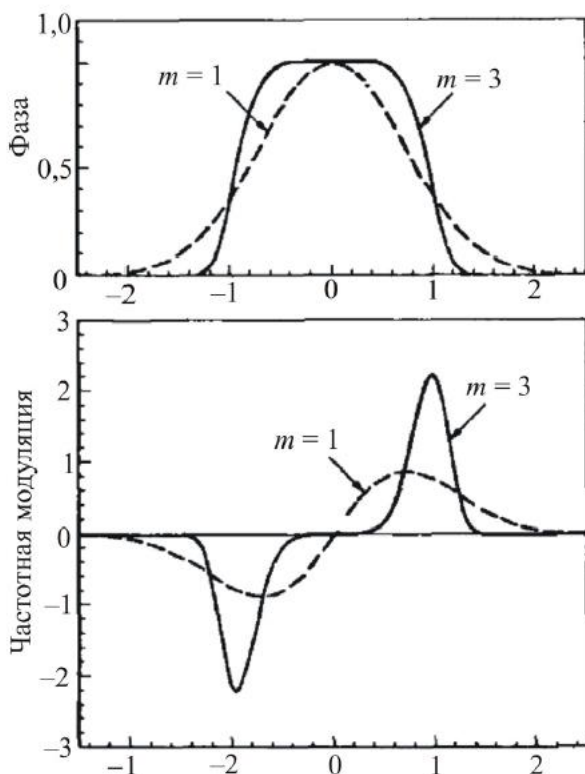


Рис. 77. Изменение во времени (t/τ) набега фазы и частоты для гауссовского импульса ($m=1$) и супергауссовского оптического импульса ($m=3$).

156.

$$\delta\omega(t) = -\gamma z \frac{\partial I_{10}}{\partial \eta} - \frac{\Delta k z}{4} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\Gamma_1^2}{\lambda^2} \right) [1 - \text{sinc}(2\lambda z)] - \left(\frac{\Gamma_1^2}{\lambda^2} \right) \frac{\partial}{\partial \eta} [\text{sinc}(2\lambda z)] \right\},$$

где $\lambda = \sqrt{2\Gamma_1^2 + \frac{\Delta k^2}{4}}$, $\Gamma_1^2 = \beta_1 \beta_2 I_{10}(\eta)$, β_j – коэффициенты нелинейной связи в оптоволокне, $\Delta k = k_2 - 2k_1$, $\eta = t - \frac{z}{v}$. Из

кривых рис.78 видно, что частотный сдвиг в оптоволокне слабее, чем в обычной среде.

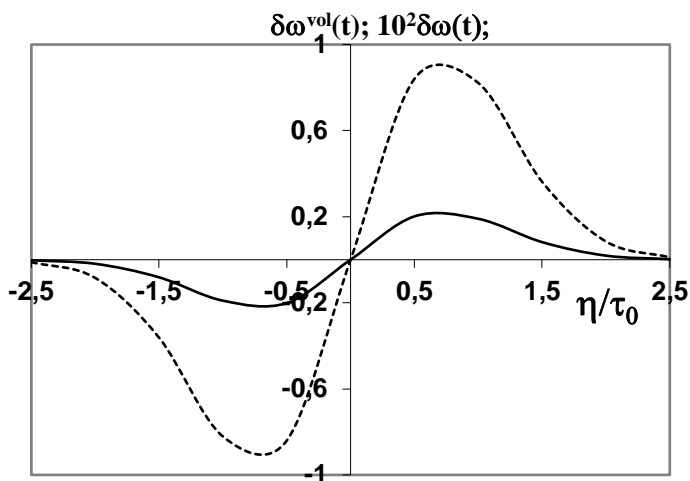


Рис. 78. Зависимости $\delta\omega$ в обычной среде (штриховая линия) и в оптоволокне (сплошная кривая).

157. В ПЗП, полагая γ_p , $\gamma_p^{p,s,i}$, $\delta_p=0$. Получаем

$$(\lambda^2)^{CFA} = \gamma_s \gamma_i I_{po}^2 - [(\delta_i - \delta_s)/2 - i(\Delta + \Delta_{SM}^{CFA} + \Delta_{XM}^{CFA})/2]^2,$$

где

$$\Delta_{XM}^{CFA} = -\gamma_i^s I_{so} - \gamma_s^i I_{io} - (\gamma_s^p + \gamma_i^p) I_{po}, \Delta_{SM}^{CFA} = -\gamma_s^s I_{so} - \gamma_i^i I_{io}.$$

Как видно в ПЗП нелинейная фазовая расстройка Δ_{SM}^{CFA} , не зависит от вклада интенсивной волны накачки, а в Δ_{XM}^{CFA} отсутствует вклад перекрестного взаимодействия волны накачки с сигнальной и холостой волнами.

В то время как в ПЗИ из выражения для λ^{CIA} видно, что период осцилляций комплексной амплитуды сигнальной волны зависит от интенсивностей волны накачки, холостой волны и сигнальной волны через Δ_{SM} и Δ_{XM} . Отметим, что в ПЗИ в параметр λ (через Γ) входит член $2\gamma_s \gamma_p I_{po} I_{io}$, зависящий от интен-

сивности холостой волны и учитывающий обратное влияние возбужденной волны на возбуждающую, отсутствующий в ПЗП. Линейная фазовая расстройка Δ не зависит от интенсивностей взаимодействующих волн и одинакова в любой точке траектории распространения волн в нелинейной среде. Возникающие нежелательные фазовые сдвиги можно регулировать посредством Δ . Варьируя входные значения интенсивностей сильной волны накачки, холостой, а также сигнальной волн, можно изменять фазовые сдвиги через эффекты самовоздействия и перекрестного взаимодействия.

Значит можно управлять фазовым соотношением между взаимодействующими волнами, что позволит регулировать эффективность преобразования в сигнальную волну при четырехволновом смешении. Таким образом, из анализа следует, что эффекты самовоздействия и перекрестного взаимодействия волн приводят к изменению соотношений, определяющих условия перекачки энергии волны накачки и холостой волны в сигнальную волну.

158. Сперва рассмотрение проведем для слабой неоднородной среды, т.е. $\alpha z^2 < 1$ и малых длин взаимодействия, когда полагаем $\Gamma z < 1$. При этих условиях гипергеометрическую функцию можно разложить в ряд $F(k, m, x) = 1 + \frac{k}{m} \frac{x}{1!} + \frac{k}{m} \frac{(k+1)}{(m+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots$. Отсюда для интенсивности гармоник можно

$$\text{получить } I_2(z) = [|\beta_2|I_{10}z]^2 \cdot \left[1 - \frac{2}{3}(\Gamma z)^2 - \frac{1}{20}(\alpha z^2)^2\right].$$

Теперь рассмотрим случай сильно неоднородной среды, когда $\alpha z^2 > 1$. Тогда для гипергеометрической функции справедлива следующая аппроксимация $F(k, m, x) \approx \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m-k)} (-x)^k + \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(k)} e^x x^{k-m}$, где $\Gamma(m)$ – гамма-функция. При условии $\Gamma^2 < 2\alpha$ для интенсивности получаем $I_2(\eta, z) = \frac{2}{\alpha} [|\beta_2|I_{10}(\eta)]^2 \exp[-\pi\Gamma^2(\eta)/2\alpha]$.

Из полученных в ПЗИ выражений видно, что учет обратного вли-

яния возбуждаемой волны гармоника на фазу волны накачки ($\Gamma \neq 0$) приводит к уменьшению эффективности частотного преобразования. Уменьшение интенсивности ВГ также происходит с ростом неоднородности нелинейной среды ($\alpha \neq 0$). На больших расстояниях наблюдается насыщение.

159. В слабой неоднородной среде получаем $\tau_{2\text{ inhom}} = 1.0468 \cdot \tau_1$, в сильной неоднородной среде $\tau_{2\text{ inhom}} = 1.0728 \cdot \tau_1$. Как и следовало ожидать, с ростом степени неоднородности оптической системы добротность системы, по аналогии с добротностью оптического резонатора, падает, что ведет к уширению импульса второй гармоники, возбуждаемого в данной системе.

160. Сперва проведем анализ полученного выражения для разных неоднородных сред. Для слабой неоднородной среды, т.е. $\alpha z^2 < 1$ и малых длин взаимодействия, $\Gamma z < 1$. При этих условиях гипергеометрическую функцию можно разложить в ряд

$$F(k, m, x) = 1 + \frac{k}{m} \frac{x}{1!} + \frac{k(k+1)}{m(m+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots$$

Отсюда для интенсивности гармоники можно получить

$$I_2(z) = [|\beta_2| I_{10} z]^2 \cdot \left[1 - \frac{2}{3} (\Gamma z)^2 - \frac{1}{20} (\alpha z^2)^2 \right].$$

Во втором случае сильно неоднородной среды $\alpha z^2 > 1$ для гипергеометрической функции справедлива следующая аппроксимация $F(k, m, x) \approx \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m-k)} (-x)^k + \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(k)} e^x x^{k-m}$, где $\Gamma(m)$ – гамма функция. При условии $\Gamma^2 < 2\alpha$ для интенсивности получаем

$$I_2(\eta, z) = \frac{2}{\alpha} [|\beta_2| I_{10}(\eta)]^2 \exp[-\pi \Gamma^2(\eta)/2\alpha].$$

Из полученных в ПЗИ выражений в обоих случаях видно, что учет обратного влияния возбуждаемой волны гармоника на фазу волны накачки ($\Gamma \neq 0$) приводит к уменьшению эффективности частотного преобразования. Уменьшение интенсивности ВГ также происходит с ростом неоднородности нели-

нейной среды ($\alpha \neq 0$). На больших расстояниях наблюдается насыщение.

161. Согласно результатам, полученным в ПЗИ, в случае сильной неоднородности степень регулярной неоднородности через экспоненциальную зависимость влияет на длительность импульса, увеличивая ее (сравнить сплошную и отмеченную кривые). Через параметр Γ изменение интенсивности накачки напрямую влияет на длительность выходного импульса второй гармоники. Данный результат невозможно получить в ПЗП, так как в этом приближении экспоненциальная зависимость отсутствует, в связи с условием $\Gamma = 0$ (штриховая кривая).

Вывод: С увеличением степени неоднородности среды длительность импульса растет.

162. Условие $\varepsilon_\omega < 0$, $\mu_\omega < 0$ приводит к отрицательному значению показателя преломления на данной частоте основного излучения. Это означает, что вектор Пойнтинга S_ω для волны накачки направлен навстречу волновому вектору k_ω . Другими словами, фазовая скорость волны основного излучения и ее групповая скорость противоположно направлены по отношению к друг другу. При этих условиях в метаматериале волновые векторы накачки и гармоники $\vec{k}_{1,2}$ совпадают по направлению и направлены вдоль отрицательной оси z . Кроме того вектор \vec{S}_2 также направлен против оси z (рис. 79).

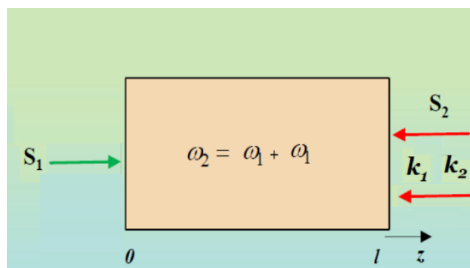


Рис. 79. При ГВГ вектора Пойнтинга и волновые вектора для рассматриваемого случая.

163. оптимальную фазовую расстройку Δk_{opt} можно определить из уравнения:

$$\tanh \lambda z = \left[3\Gamma^2 \cosh^2 \lambda l - \frac{\Delta k^2}{4} \right] / \left[1.5 \frac{\Gamma^2 l}{\lambda} \sinh 2 \lambda l + 1 \right]$$

164. $\phi_1(z) = \phi_{1l} + \frac{1}{\cosh^2 \lambda l} \cdot \frac{\frac{\Delta k}{\lambda} \sinh 2 \lambda z - \Delta k z}{(\frac{\Delta k}{\Gamma})^2 (\tanh^2 \lambda l - 1) + 12}.$

165. Основное отличие поведения сигнальной волны, на частоте которой ε и μ одновременно отрицательны, от поведения в обычной квадратичной нелинейной среде связано со встречным направлением скорости переноса энергии сигнальной волны по отношению к ее фазовой скорости. Данное утверждение приводит к зависимости поля сигнальной волны (через граничные условия) от полной длины метаматериала l .

166. $\eta_1 = 0.022$ (кривая 1 на приведенном рис. 80).

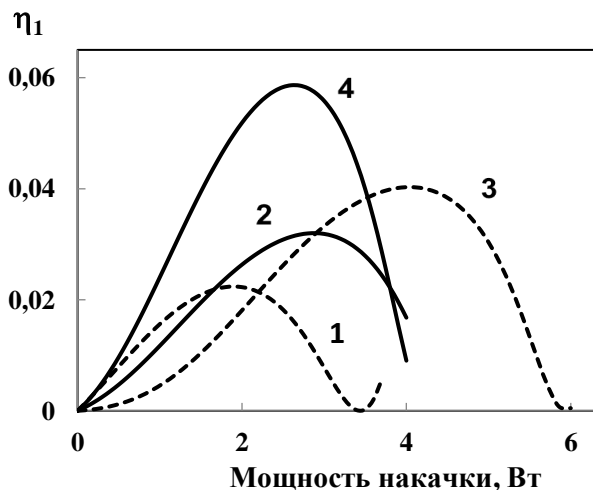


Рис. 80. Зависимость эффективности преобразования в сигнальную волну, $\eta_1 = \frac{I_1(z=0)}{I_{20}}$ от мощности накачки для $I_{1\ell} = 0$ при $I_{20}/I_{30} = 0.1$ (кривые 1-3) и 0.2 (кривая 4) при $\Delta k = 5 \text{ см}^{-1}$ (кривая 3), 5.5 см^{-1} (кривые 2 и 4) 6 см^{-1} (кривая 3).

167. Анализ в ПЗП не учитывает никаких изменений в величине комплексной амплитуды сильной волны накачки. Расчеты, проведенные в ПЗИ, предполагают изменения фаз всех взаимодействующих волн, в этом приближении уже не работает соотношение, что комплексная амплитуда волны накачки постоянна, т.е. в условиях данной задачи $A_3(z) = \text{const}$. ПЗИ учитывает истощением накачки в процессе нелинейного взаимодействия. А поскольку эффективность преобразования прямо пропорциональна интенсивности излучения, то эффективность, рассчитанная в ПЗИ меньше, чем в ПЗП, и более приближена к реально достигаемому значению преобразования.

168. Известно, что при этих условиях в метаматериале волновые векторы всех четырех волн $\vec{k}_{1,2,3,4}$ направлены вдоль положительного направления оси z , т.е. совпадают по направлению с потоками энергии трех взаимодействующих волн $\vec{S}_{2,3,4}$. Таким образом, рассматриваемые при четырехволновом взаимодействии семь векторов ($\vec{k}_{1,2,3,4}$ и $\vec{S}_{2,3,4}$) противоположны вектору Пойнтинга \vec{S}_1 обратной сигнальной волны.

При выбранной схеме взаимодействия соответствующие граничные условия для рассматриваемых волн в общем случае можно представить в виде:

$$A_{2,3,4}(z=0) = A_{20,30,40}, A_1(z=\ell) = A_{1\ell}.$$

Здесь $z=0$ соответствует входу слева в метаматериал, $A_{20,30,40}$ – начальные амплитуды слабой волны на частоте ω_2 и волн накачек при входе слева в нелинейную среду, $A_{1\ell}$ – начальная амплитуда сигнальной волны на входе в нелинейную среду справа при $z=\ell$.

169. При $\gamma_{3,4} = 0$ получаем результат ПЗП: $I_{po}^{CFA} = \frac{\delta_1}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}}$.

170. Из анализа следует, что в обычных средах наблюдается экспоненциальное уменьшение коэффициента усиления с увеличением потерь δ_1 , что видно из показателя степени экспоненты с положительными членами. В отличие от случая в

метаматериале в обычной среде вклад члена с потерями компенсируется функцией $\text{sinc} \kappa l$, максимальное значение которого равно 1. В случае метаматериала коэффициент усиления волны на частоте ω_2 экспоненциально зависит от потерь, где члены входят с разными знаками. Это позволяет реализовать компенсацию потерь для рассматриваемой волны на частоте ω_2 . При трехволновом взаимодействии возможно распространение волны в левой среде (с отрицательным преломлением) с постоянной амплитудой, а также ее усиление в такой нелинейной среде. Показано, что потери в метаматериале для обратной волны можно не только компенсировать, но и манипулировать этими потерями.

171. $\gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{12}, \gamma_{21}$ – коэффициенты, связанные с кубической нелинейностью среды, $\gamma_{nj} \sim \chi^{(3)}$, $\gamma_{11} = -|\gamma_{11}|$, $\gamma_{12} = -|\gamma_{12}|$. Члены с γ_{11}, γ_{22} ответственны за самовоздействие волн, а с γ_{12}, γ_{21} за перекрестное взаимодействие волн.

172. Дифференцируя (2) по Ω , находим, что максимум спектра второй гармоники достигается на частоте, отстоящей от центральной частоты спектра гармоники на расстоянии $\Omega 2 \frac{0.36 \cdot v(\Delta k^{NL} + \Delta k) l^2}{\tau_1^2 + 0.36 \cdot v^2 l^2} \max_{max}$.

173. Изучение нелинейного взаимодействия волн в первом приближении теории дисперсии проводится с учетом эффекта группового запаздывания из-за расстройки групповых скоростей (в системе учитываются только члены с первой производной по времени), а во втором приближении теории дисперсии одновременно учитываются как эффект группового запаздывания, так и эффект дисперсионного распыливания из-за дисперсии фазовых скоростей, когда в укороченных уравнениях учитываются члены с первой и второй производными по времени.

174. При параметрической генерации сигнальная волна возбуждается по мере распространения в среде трех прямых

волн в результате перекачки энергии этих волн в энергию сигнальной волны, генерирующую во встречном направлении. Заметное усиление сигнальной волны наблюдается на значительных расстояниях z . С одной стороны, при наличии потерь в среде происходит уменьшение амплитуды распространяющихся волн в направлении переноса энергии. С другой стороны, метаматериал, обеспечивая положительную обратную связь, через нелинейность среды, при параметрическом взаимодействии способен компенсировать потери и в этом случае обратная сигнальная волна будет распространяться с постоянной амплитудой и возможно даже усиление и генерация обратной волны.

175. Аналитическое выражение для амплитуды волны накачки в случае фазового синхронизма в диссипативных средах равно

$$I_{po}^{thresh} = \frac{\gamma_3 + \gamma_4}{2\gamma_2} I_{20} + \sqrt{\left(\frac{\gamma_3 + \gamma_4}{2\gamma_2} I_{20}\right)^2 + \frac{\delta_1^2}{\gamma_1\gamma_2}}$$

176.

$$A_p(z = 0) = A_p(z = l) \cdot \exp(i\phi_p),$$

$$A_s(z = 0) = A_s(z = l) \cdot \exp(i\phi_s),$$

$$A_a(z = 0) = A_a(z = l) \cdot \exp(i\phi_a),$$

где $\phi_{p,s,a} = \phi_{r,p,s,a} + \phi_{p,s,a}(2d)$, ϕ_r — скачки фазы волн на частотах $\omega_{p,s,a}$ при отражении от зеркала Z_2 , $\phi(2d)$ набег фаз волн на соответствующих частотах в воздушном промежутке длины d между средой и зеркалом Z_2 ; $z=0$ опять соответствует входу справа в нелинейную среду.

177. Это следует из приведенного аналитического выражения для оптимального фазового соотношения.

178. В классическом спонтанном комбинационном рассеянии (рамановском рассеянии) происходит неупругое рассеяние оптического излучения на молекулах вещества. В результате происходит возбуждение колебаний молекул среды и появле-

ние стоксовой компоненты рассеяния. Затем в дальнейшем при рассеянии света на этих молекулярных возбуждениях появляется антистоксовая компонента рассеяния.

При КАРС изначально участвуют две лазерные волны. В этом случае на среду падают эти две волны на частотах ω_1 и ω_2 , что приводит к возбуждению в среде сфазированных когерентных колебаний на разностной частоте $\omega_V = \omega_1 - \omega_2$. Затем эти колебания на частоте ω_V взаимодействуют с лазерной волной на частоте ω_1 . Это взаимодействие приводит к возбуждению и генерации когерентного сигнала на антистоксовой частоте $\omega_a = 2\omega_1 - \omega_2$. Если при спонтанном комбинационном (рамановском) процессе рассеяние возникает на тепловых возбуждениях среды, то при КАРС рассеяние происходит на оптически подготовленных когерентных возбуждениях.

γ_i ($i = s, a$) и $\gamma_p^{s,a}$ являются коэффициентами нелинейной связи при стимулированном рамановском рассеянии стоксовой и антистоксовой компонент, а $\gamma_{p,s,a}^{sa}$ являются нелинейными коэффициентами связи между стоксовой и антистоксовой компонентами, определяют вклад четырехволнового смешения в нелинейную поляризацию на частотах $\omega_{p,s,a}$.

179. $\gamma_p^{s,a}$ являются коэффициентами нелинейной связи при стимулированном рамановском рассеянии стоксовой и антистоксовой компонент, а $\gamma_{p,s,a}^{sa}$ являются нелинейными коэффициентами связи между стоксовой и антистоксовой компонентами, определяют вклад четырехволнового смешения в нелинейную поляризацию на частотах $\omega_{p,s,a}$.

180. Искомое дисперсионное соотношение: $\omega_a = 2V_a|k_p| \sin \frac{\theta}{2}$, что следует из рис. 81. Здесь θ – угол между направлением волны накачки (k_0) и направлением стоксовой компоненты (k_s), V_a – скорость акустической волны, т.е. звука. Максимальное значение сдвига частоты $\nu_B = \frac{2nV_a}{\lambda_p} = 11.1$ ГГц (для $n = 1.45$).

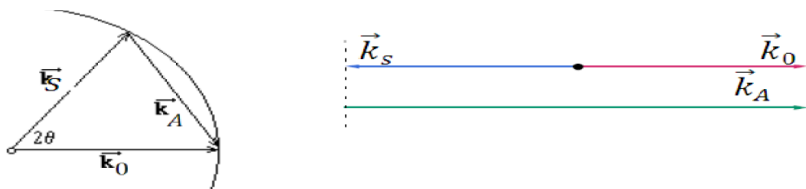


Рис. 81. Геометрия ВРМБ.

181. $5 \cdot 10^{-10}$ м/Вт.

182. $P_0^{thresh} = 0,1$ мВт.

183. Величина потерь для кристалла GaP мала, $\Delta\omega_L/\omega_0 = 0,003$, поэтому в знаменателе $\varepsilon_{eff}^{1/2} = \varepsilon_\infty + \frac{\omega_0^2 \Delta\varepsilon}{\omega_0^2 - \omega_3^2 + i\Delta\omega_L \omega_0}$ можно пренебречь мнимым членом. Тогда диэлектрическая проницаемость действительная величина. Получаемая дисперсионная зависимость для поляритона имеет вид

$$k_3 c / \omega_3 = \frac{\omega_3}{\omega_0} \left[8,457 + \frac{1,725}{1 - \left(\frac{\omega_3}{\omega_0} \right)^2} \right].$$

На рис. 82 представлена дисперсионная характеристика для кристалла GaP.

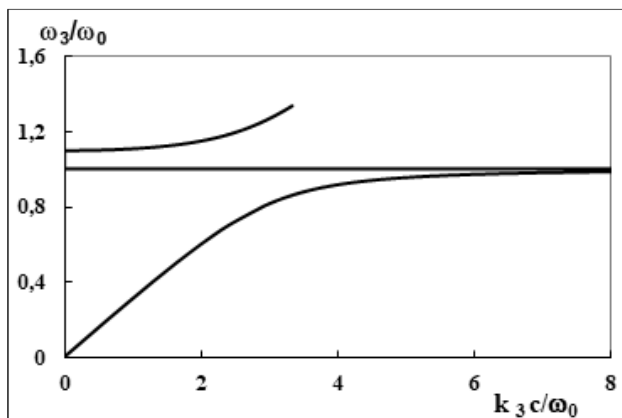


Рис. 82. Дисперсионная характеристика для кристалла GaP.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Используемые соотношения

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{e}_z,$$

$$\text{div } \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

$$\oint_S \mathbf{a} d\mathbf{S} = \int_V \text{div } \mathbf{a} dV,$$

$$\oint_S \mathbf{v} d\mathbf{S} = \int_V \text{div } \mathbf{v} dV,$$

$$\text{rot } \mathbf{a} = [\nabla \mathbf{a}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix},$$

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} = \nabla \varphi,$$

$$\text{rot rot } \mathbf{a} = [\nabla, [\nabla \mathbf{a}]] = \nabla(\nabla \mathbf{a}) - (\nabla \nabla) \mathbf{a} = \text{grad div } \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a},$$

$$\mathbf{a}[\mathbf{bc}] = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab}),$$

$$\text{div grad } \varphi = \nabla(\nabla \varphi) = (\nabla \nabla) \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta \varphi,$$

Δ – оператор Лапласа, лапласиан, ∇ – оператор набла.

- Связь между функцией Уиттекера $M_{k,m}(x)$ и вырожденной гипергеометрической функцией $F(\alpha, \beta, x)$:

$$M_{k,m}(x) = x^{\frac{1}{2}+m} e^{-\frac{x}{2}} {}_1F_1(m - k + \frac{1}{2}, 2m + 1, x).$$

- Разложение в ряд гипергеометрической функции

$$F(k, m, x) = 1 + \frac{k}{m} \frac{x}{1!} + \frac{k(k+1)}{m(m+1)} \frac{x^2}{2!} +,$$

$$F(k, m, x) \approx \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m-k)} (-x)^k + \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(k)} e^x x^{k-m},$$

где $\Gamma(m)$ – гамма функция

- $\text{sinc } x = \frac{\sin x}{x}$.
- Соотношения Мэнли – Роу при трехчастотном взаимодействии оптических волн:

$$\begin{aligned} \frac{a_1^2(z) - a_1^2(0)}{a_2^2(z) - a_2^2(0)} &= \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \approx \frac{\omega_1}{\omega_2}, \\ \frac{a_2^2(z) - a_2^2(0)}{a_3^2(z) - a_3^2(0)} &= -\frac{\gamma_2}{\gamma_3} \approx -\frac{\omega_2}{\omega_3}, \\ \frac{a_1^2(z) - a_1^2(0)}{a_3^2(z) - a_3^2(0)} &= -\frac{\gamma_1}{\gamma_3} \approx -\frac{\omega_1}{\omega_3}. \end{aligned}$$

- Формула Рэлея, связывающую групповую и фазовую скорости волны,

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda},$$

где u – групповая скорость волны, а v – фазовая скорость волны.

- Формула для перевода единиц: $a, \text{В/м} = \sqrt{\frac{752}{cn}} I, \text{Вт/см}^2$,

где n – показатель преломления на длине волны лазерного излучения, плотность потока излучения I в единицах Вт/см^2 и амплитуду волны лазерного излучения a в единицах В/м . Здесь комплексная амплитуда поля волны $A = a \cdot e^{i\varphi}$, где a – вещественная амплитуда волны, φ – фаза волны.

Физические постоянные

Постоянная Больцмана	$1.38 \cdot 10^{-16} \text{ эрг/Дж} = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$
Элементарный заряд	$1.602 \cdot 10^{-19} \text{ К}$
Масса электрона	$0.911 \cdot 10^{-27} \text{ г} = 0.911 \cdot 10^{-30} \text{ кг}$
Масса протона	$1.672 \cdot 10^{-24} \text{ г} = 1.672 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Постоянная Планка	$6.626 \cdot 10^{-27} \text{ эрг}\cdot\text{с} = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}$
Боровский радиус	53 пм
Скорость света в вакууме	$3 \cdot 10^{10} \text{ см/с} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
Электрическая постоянная	$\epsilon_0 \approx 0.885 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м}$
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$
Внутриатомное поле, действующее на оптический электрон	
в атоме водорода	$E_a = 10^9 \text{ В/см}$
в полупроводниках	$E_a = 10^7 \div 10^8 \text{ В/см}$
Длина волны фотона с энергией в 1 эВ	1240 нм
Частота фотона с энергией в 1 эВ	241,8 ТГц
Энергия в 1 эВ	$1.6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$
d_{33} для LiNbO_3	34,4 пм/В
d_{36} для $\text{AgGa}_{0.6}\text{In}_{0.4}\text{Se}_2$	41 пм/В
d_{36} для AgGaSe_2	39 пм/В
d_{eff} для ZnGeP_2 (ZGP)	75 пм/В
d_{eff} для LiGaS_2	5,5 пм/В
d_{eff} для BaGa_4S_7	5,1 пм/В
угол анизотропии для используемых в нелинейной оптике кристаллов	$1^0 \div 4^0$
1 аттосекунда	10^{-18} с
1 фемтосекунда	10^{-15} с
1 пикосекунда	10^{-12} с

Уравнения электромагнетизма в СИ и гауссовой системе

Наименование	СИ	Гауссова система
Связь между P и E Электрическое смещение (электрическая индукция)	$\mathbf{P} = \chi \varepsilon_0 \mathbf{E}$ $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$	$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}$ $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}$
Дивергенция вектора D	$\nabla \mathbf{D} = \rho$	$\nabla \mathbf{D} = 4\pi \rho$
Связь между диэлектрической проницаемостью ε и диэлектрической восприимчивостью χ	$\varepsilon = 1 + \chi$	$\varepsilon = 1 + 4\pi \chi$
Связь между D и E	$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}$	$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$
Связь между D и E в вакууме	$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$	$\mathbf{D} = \mathbf{E}$
Связь между B и H	$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}$	$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$
Связь между B и H в вакууме	$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$	$\mathbf{B} = \mathbf{H}$
Уравнения Максвелла в дифференциальной форме	$[\nabla \mathbf{E}] = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\nabla \mathbf{B} = 0$ $[\nabla \mathbf{H}] = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ $\nabla \mathbf{D} = \rho$	$[\nabla \mathbf{E}] = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\nabla \mathbf{B} = 0$ $[\nabla \mathbf{H}] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ $\nabla \mathbf{D} = 4\pi \rho$
Скорость электромагнитных волн	$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$	$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$
Вектор Пойнтинга	$\mathbf{S} = [\mathbf{E} \mathbf{H}]$	$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \mathbf{H}]$

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ КНИЖНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. **Agrawal G.** Nonlinear Fiber Optics. Elsevier, 2012, 632 p.
2. **Bloembergen N.** Chapter 21. Nonlinear Optics. Harvard, p. 875-927.
3. **Boyd R.W.** Nonlinear optics. Academic Press, 2020, 637p.
4. **Shen Y.R.** The principles of Nonlinear Optics. Willey Classics Library, 2002, 576 p.
5. **Zernike F., Midwinter J.** Applied Nonlinear Optics. Courier Corporation, 2006, 197 p.
6. **Беспрозванных В.Г., Первадчук В.П.** Нелинейная оптика. Пермь, 2011, 199 с.
7. **Вейко В.П., Шахно Е.А.** Сборник задач по лазерным технологиям. ИТМО, Санкт-Петербург, 2007, 67 с.
8. **Воронин В.Г., Наний О.Е.** Основы нелинейной волоконной оптики. М., 2011, 128 с.
9. **Дмитриев В.Г., Тарасов Л.В.** Прикладная нелинейная оптика. М., 2004, 512 с.
10. **Савельев И.В.** Курс общей физики, т.2. Электричество. Волны. Оптика. Наука. 1988г.496с
11. **Сизмин Д.В.** Нелинейная оптика. Саров, 2015, 147 с.

СПИСОК ПРИНЯТЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

- ГВГ** – генерация второй гармоники,
ВГ – вторая гармоника,
ГТГ – генерация третьей гармоники,
ТГ – третья гармоника,
ГСЧ – генерация суммарной частоты,
ГРЧ – генерация разностной частоты,
ЧВ – четырехволновое,
НЧ – низкочастотная,
ВЧ – высокочастотная,
ПЗП – приближение заданного поля,
ПЗИ – приближение заданной интенсивности,
РДС – регулярные доменные структуры,
ВКР – вынужденное комбинационное рассеяние,
КАРС – когерентное антистоксовое рассеяние света,
ВПР – вынужденное поляритонное рассеяние,
РММА – полиметилметакрилат,
 A_{eff} – эффективная область сердцевины оптоволокна.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВСТУПЛЕНИЕ.....	3
ПОЛЯРИЗОВАННОСТЬ И ВОСПРИИМЧИВОСТЬ	5
Модуляция показателя преломления среды	9
МОДЕЛИ ОПТИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА	11
ФАЗОВАЯ И ГРУППОВАЯ СКОРОСТИ	17
ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИКЕ	21
СОГЛАСОВАНИЕ ФАЗ. УСЛОВИЕ СИНХРОНИЗМА.....	30
ТИПЫ СИНХРОНИЗМА	38
СИММЕТРИЯ КРИСТАЛЛОВ	48
ПЕРСПЕКТИВНЫЕ КРИСТАЛЛЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИКИ. КРИТИЧНОСТЬ К СИНХРОНИЗМУ	51
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЧАСТОТЫ В ОПТИЧЕСКОМ РЕЗОНАТОРЕ	73
Преобразование во внешнем резонаторе	75
Преобразование внутри лазерного резонатора	77
СПЕЦИАЛЬНЫЕ СХЕМЫ КОМПЕНСАЦИИ	83
Регулярные доменные структуры	85
Квазисинхронные взаимодействия.....	91
Внутрирезонаторный способ частотного преобразования в РДС	98
Последовательные квазисинхронные взаимодействия	102
ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ. ЧЕТЫРЕХВОЛНОВОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ	105
ВОЛОКОННАЯ ОПТИКА.....	111
Распространение оптических импульсов в кубически нелинейной среде	114

Эффекты самовоздействия и перекрестного взаимодействия при ЧВ смещении	119
ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНЫЕ СРЕДЫ.....	122
МЕТАМАТЕРИАЛЫ.....	127
Стационарный режим генерации. Генерация гармоник.	
Параметрическое взаимодействие.....	132
Нестационарный режим генерации.....	143
НЕУПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ	150
Комбинационное рассеяние света.....	151
Когерентное антистоксовое рассеяние света.....	153
Вынужденное рассеяние Мандельштама – Бриллюэна.....	159
Вынужденное поляритонное рассеяние	161
ОТВЕТЫ.....	165
ПРИЛОЖЕНИЯ	215
Используемые соотношения	215
Физические постоянные	217
Уравнения электромагнетизма в СИ и гауссовой системе	218
ИСПОЛЬЗОВАННАЯ КНИЖНАЯ ЛИТЕРАТУРА	219
СПИСОК ПРИНЯТЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ.....	220

Рена Джумшуд кызы КАСУМОВА

доктор физико-математических наук, профессор

ЗАДАЧИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИКЕ

Издатель: Эльнара Аббасова
Технический редактор: Асим Сафаров
Дизайнер: Ирада Ахмедова
Операторы: Лейла Мамедли, Омар Гасымлы

Подписано к печати: 07.01.2025.
Формат 60x84; Усл.п.л.: 14
Tiraj: 100
Отпечатано в типографии "Füyuzat"
Адрес: г.Баку, ул. З.Халилова, 26
Тел.: 055 850 98 69

